

AUTO-AJUSTEMENT DE RÉGULATEURS PID ROBUSTES DANS LE DOMAINE FRÉQUENTIEL

THÈSE N° 3520 (2006)

PRÉSENTÉE LE 5 MAI 2006

À LA FACULTÉ SCIENCES ET TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR

Laboratoire d'Automatique

SECTION DE GÉNIE MÉCANIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Daniel GARCIA

Ingénieur mécanicien diplômé EPF
de nationalité suisse et originaire de Savièse (VS)

acceptée sur proposition du jury:

Prof. P. Xirouchakis, président du jury
Prof. R. Longchamp, Dr A. Karimi, directeurs de thèse
Prof. A. Glatfelder, rapporteur
Prof. U. Holmberg, rapporteur
Dr A. Voda, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Lausanne, EPFL

2006

«Dem Ingeniör
ist nichts zu schwör»
Tiré d'une annonce de SAIA AG, Morat

À Diane, à Jessica et à mes parents

Remerciements

Le travail relaté dans cet ouvrage est l'aboutissement de cinq années d'activité passées au sein du Laboratoire d'Automatique de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Cette période, très riche au niveau professionnel, m'a en outre permis d'acquérir de bonnes connaissances de ce merveilleux domaine scientifique qu'est l'automatique. Ainsi, je tiens tout d'abord à remercier les professeurs Longchamp et Bonvin ainsi que le Dr. Gillet pour m'avoir accueilli dans leur Laboratoire. Je tiens également à exprimer ma gratitude à mes superviseurs directs, le Dr. Karimi et le professeur Longchamp, qui, grâce à leurs grandes compétences professionnelles et scientifiques, m'ont toujours prodigué de très bons conseils. Mes remerciements vont également aux autres membres du Laboratoire, avec qui j'ai eu de fructueuses discussions, et qui ont largement contribué à la bonne ambiance de travail au quotidien.

Ces cinq dernières années ont été florissantes au niveau familial également. Alors que les prémices de la thèse ont été marquées par mon mariage, sa fin a vu naître mon premier enfant, Diane. Je tiens ainsi à remercier ma femme Jessica pour son amour et sa présence à mes côtés durant toutes ces années, mais aussi pour sa patience et son support, tout particulièrement en cette période de fin de thèse. Les premiers mois de la vie de Diane ont d'ailleurs coïncidé avec la période laborieuse de la rédaction de thèse. Je lui suis donc très reconnaissant d'avoir laissé dormir son papa durant les nuits et de l'avoir encouragé chaque jour par tant de sourires. Les progrès qu'elle réalise après quelques mois seulement dans le contrôle de ses mouvements ont cependant rapidement anéanti mes certitudes quant à l'état d'avancement actuel de l'automatique.

J'aimerai également exprimer toute ma reconnaissance à mes parents pour avoir, toutes ces années durant, généré des conditions familiales plus que parfaites : un grand merci pour m'avoir toujours donné votre entière

confiance et m'avoir constamment encouragé et soutenu tout au long de mes études. Un remerciement tout spécial va à ma maman, Marie-Cécile, pour avoir entrepris la correction grammaticale et orthographique des chapitres qui suivent. Ses remarques très pertinentes ont permis d'éviter nombres d'erreurs.

Je tiens également à remercier les membres du jury de thèse pour leur participation. Finalement, j'aimerais souhaiter une bonne lecture de ce document au lecteur intéressé.

Version abrégée

Le travail documenté dans cet ouvrage considère la synthèse de régulateurs proportionnel intégral dérivé (PID). De par leurs structures simples, ceux-ci sont très appréciés et abondamment utilisés par la communauté industrielle.

Le nombre restreint de paramètres d'ajustement implique des performances souvent plus modérées que celles pouvant potentiellement être obtenues en utilisant un régulateur d'ordre élevé. En contrepartie, la synthèse d'une commande PID doit pouvoir être réalisée de façon simple et rapide. En pratique, les méthodes ne requérant qu'un minimum d'informations du système à commander sont largement favorisées.

C'est dans ce contexte que se situe cette thèse. L'ajustement est considéré dans le domaine fréquentiel, car la stabilité et la robustesse, ainsi que les performances temporelles du système en boucle fermée, peuvent y être représentées. Les indicateurs classiques de robustesse, constitués des marges de phase et de gain, la pulsation de croisement, mais également des paramètres plus avancés, composés des normes infinies des fonctions de sensibilité, peuvent être pris en compte par les approches présentées.

Dans un premier volet, la synthèse est réalisée sans l'utilisation d'un modèle du système à commander. La simplicité de la méthode modifiée de Ziegler-Nichols est tout d'abord exploitée. En ne mesurant qu'un point de la réponse harmonique du système, cette dernière propose d'ajuster le régulateur de sorte à obtenir une marge de phase désirée. Dans cet ouvrage, on ambitionne en plus de calibrer la pente de la réponse harmonique de la boucle à la pulsation de croisement de sorte à satisfaire des contraintes sur les normes infinies des fonctions de sensibilité. Le calibrage peut être réalisé à l'aide d'approximations découlant des intégrales de Bode, sans avoir besoin d'informations supplémentaires au sujet du système à commander. Parfois, cette approche permet d'améliorer grandement les résultats obtenus par la

méthode originale, sans pour autant perdre la facilité extrême de mise en œuvre.

Par la suite, une approche itérative, sans modèle, est étudiée. On se propose alors de mesurer, en boucle fermée, à l'aide de cycles limites découlant d'expériences non linéaires, les marges de robustesse d'un système. À des fins d'optimisation, un critère fréquentiel est ensuite défini par la somme pondérée du carré des erreurs entre les valeurs spécifiées et mesurées des marges considérées. La minimisation est alors réalisée par un algorithme de type gradient, sans devoir recourir à d'autres informations du système que celles mesurées précédemment.

Enfin est considérée l'approche axée sur un modèle du système à commander. Les méthodes d'ajustement de régulateurs PID existantes se fondent généralement sur des modèles sommaires de premier ou de deuxième ordre avec retard pur. De nombreuses incertitudes découlent souvent de telles pratiques, à cause notamment de modes non modélisés. Dans ce travail, les incertitudes relatives au modèle identifié sont directement prises en compte afin de garantir performance et stabilité robustes au système en boucle fermée. Finalement, une application directe de cette méthodologie peut être formulée pour la synthèse d'une commande décentralisée, relative aux systèmes multivariables.

Dans chaque chapitre, une application temps réel est présentée pour illustrer les méthodes proposées et témoigner de leur efficacité et de leur simplicité.

Mots-clés : Auto-ajustement, régulateurs PID, robustesse.

Abstract

This work considers the adjustment of proportional-integral-derivative (PID) controllers. Because of their very simple structures, this kind of controllers are very appreciated, and used abundantly by the industrial community.

The restricted number of the controller parameters often implies moderate performances, compared to those that can be obtained by high order control structures. In compensation, it is highly desired to use simple and fast procedures for the tuning of PID controllers. In practice, the methods using minimal a priori information about the plant are largely preferred.

This thesis falls in this context. The adjustment is considered in the frequency domain, because as well as stability and robustness, the time domain performances of the closed-loop system can be represented. The traditional robustness indicators, which consist of the phase and gain margins, the crossover frequency, as well as more advanced parameters, which are the infinity-norm of the sensitivity and complementary sensitivity functions, can be taken into account by the presented approaches.

In the first chapters, the synthesis is realized in a model-free framework. First of all, the simplicity of the modified Ziegler-Nichols method is exploited. By measuring only one point of the system frequency response, the approach mentioned above proposes to adjust the PID controller parameters in order to obtain a desired value for the phase margin. In this work, it is also desired to calibrate the slope of the loop frequency response at the crossover frequency in order to satisfy constraints on the infinity-norm of the sensitivity functions. This calibration can be done by using approximations arising from Bode's integrals, without requiring any other information about the plant. This approach often improves the results compared to the original modified Ziegler-Nichols method, without losing its extreme ease of implementation.

Next, an iterative model-free tuning approach, is studied. Robustness margins are measured directly on the plant using limit cycles generated by non-linear closed loop experiments. A frequency criterion is then defined as the weighted sum of the squared errors between the desired and the measured values of the considered margins. The criterion minimization is carried out iteratively using a gradient algorithm, without requiring any other information about the plant than that measured previously.

Finally, a model-based approach is presented. The existing methods are usually based on simple first or second order plant model. Many uncertainties rise often from such approaches, due in particular to unmodeled dynamics. In this work, the model uncertainties are directly taken into account in order to guarantee robust performance and stability for the closed-loop system. Finally, a direct application of this methodology is formulated for the decentralized control of multivariable systems.

In each chapter a real-time application is presented to illustrate the methods and to show their effectiveness and simplicity.

Keywords: Auto-tuning, PID controllers, robustness.

Notations

Symboles généraux

BIBO	<i>bounded input bounded output</i>
IMC	<i>internal model control</i>
MIMO	<i>multiple inputs, multiple outputs</i>
PID	régulateur proportionnel intégral dérivé
PI	régulateur proportionnel intégral
SISO	<i>single input, single output</i>
\Re	partie réelle
\Im	partie imaginaire
\angle	phase
$ \cdot $	module ou valeur absolue
$\ \cdot\ _\infty$	norme infinie
\cdot^*	dénote une valeur spécifiée

Lettres latines

A	amplitude d'un cycle limite à l'entrée de la non-linéarité
C	contour de Nyquist
$d(t)$	signal perturbateur
$D(s)$	transformée de Laplace de $d(t)$
$e(t)$	signal d'écart entre la consigne et la grandeur à commander
$E(s)$	transformée de Laplace de $e(t)$
\mathbf{F}	matrice quelconque définie positive
$F_\alpha(s)$	fonction de transfert vue par la saturation dans le schéma de mesure de M_s
f	fonction non linéaire statique
g	fonction utilisée pour la démonstration de passivité

$G(s)$	fonction de transfert générale
$G_n(s)$	fonction de transfert nominale du système à commander
G_e	ensemble de fonctions de transfert
H	Hessien
I	point d'intersection entre F_α et l'axe réel négatif
$j = \sqrt{-1}$	nombre imaginaire pur
J	critère fréquentiel
k	pente d'une saturation
$K(s)$	fonction de transfert du régulateur
K_d	gain de dérivation d'un régulateur
K_i	gain d'intégration d'un régulateur
K_p	gain proportionnel d'un régulateur
$K_u = 1/M_g$	inverse de la marge de gain
$L(s)$	fonction de transfert de la boucle
M	amplitude du cycle limite à la sortie de la non-linéarité
M_g	marge de gain
$M_m = 1/M_s$	marge de module
M_s	norme infinie de la fonction de sensibilité
M_t	norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire
$n(t)$	bruit de mesure
n_p	nombre de paramètres de synthèse
n_ρ	nombre de paramètres du régulateur
$N(s)$	transformée de Laplace de $n(t)$
N	nombre intervenant dans le filtre du terme dérivé d'un régulateur
$N(A, \omega)$	gain équivalent de la non-linéarité
$N_s(A)$	gain équivalent d'une saturation
$N_r(A)$	gain équivalent d'un relais
o	dépassement (%)
P_i	$i^{\text{ème}}$ paramètre de synthèse
$r(t)$	signal de consigne
Q	matrice de transfert d'un pré-compensateur
$R(s)$	transformée de Laplace de $r(t)$

s	opérateur de Laplace
$s_a(\omega)$	pente de l'amplitude dans le diagramme de Bode
$s_\phi(\omega)$	pente de la phase dans le diagramme de Bode
$S(s)$	fonction de sensibilité
S_1, S_2	sous-systèmes utilisés pour la démonstration de passivité
t	temps
t_e	temps d'établissement
t_m	temps de montée
$T(s)$	fonction de sensibilité complémentaire
T_d	constante de dérivation d'un régulateur
T_i	constante d'intégration d'un régulateur
$u(t)$	grandeur de commande
$U(s)$	transformée de Laplace de $u(t)$
V	fonction utilisée pour la démonstration de passivité
$W(s)$	profil d'incertitudes
$y(t)$	grandeur à commander
$Y(s)$	transformée de Laplace de $y(t)$

Lettres grecques

α	nombre utilisé dans le schéma de mesure de M_s
β	nombre utilisé dans le schéma de mesure de M_t
$\gamma (= T_i/T_d)$	rapport entre la constante d'intégration et de dérivation
γ_m	pas d'itération
δ	nombre réel positif
$\Delta(s)$	fonction de transfert variable servant à décrire les incertitudes
ε	petit nombre réel positif
λ_i	facteur de pondération du $i^{\text{ème}}$ terme du critère J
ω	pulsation
ω_c	pulsation de croisement
ω_u	pulsation critique
ω_{M_s}	pulsation associée à la norme infinie de la fonction de sensibilité

ω_{M_t}	pulsation associée à la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire
$\boldsymbol{\rho}$	vecteur des paramètres du régulateur
τ	retard pur
Φ_m	marge de phase
ψ	pente de la réponse harmonique de la boucle en ω_c

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Motivations	1
1.2	État de l’art	4
1.3	Objectifs	7
1.3.1	Méthodes fondées sur des mesures	7
1.3.2	Méthodes fondées sur un modèle	8
1.4	Structure du mémoire	9
2	Notions préliminaires	11
2.1	Introduction	11
2.2	Régulateur PID	12
2.2.1	Structures du régulateur	12
2.2.2	Forces et faiblesses	15
2.3	Spécifications pour l’ajustement	18
2.3.1	Stabilité	19
2.3.2	Robustesse et marges de stabilité	22
2.3.3	Performance en poursuite	25
2.3.4	Rejet de perturbations	30
2.3.5	Sensibilité au bruit de mesure	32
2.3.6	Choix des paramètres de synthèse	33
2.4	Méthodes du relais	35
2.4.1	Méthode du premier harmonique	35
2.4.2	Méthode standard du relais	41
2.4.3	Amélioration de la précision des mesures	42
3	Ajustement non itératif sans modèle	45
3.1	Introduction	45

3.2	Imposition de la marge de phase	47
3.3	Ajustement de la pente de la réponse harmonique de la boucle	49
3.4	Intégrales de Bode	51
3.4.1	Dérivée de l'amplitude	51
3.4.2	Dérivée de la phase	53
3.4.3	Précision des approximations	54
3.5	Choix de la pente	57
3.5.1	Sensibilité complémentaire	57
3.5.2	Sensibilité mixte	59
3.6	Exemple de simulation	61
3.7	Application	64
3.8	Conclusions	66
4	Ajustement itératif sans modèle	69
4.1	Introduction	69
4.2	Mesure des marges de robustesse	71
4.2.1	Mesure de la marge de gain	72
4.2.2	Mesure de la marge de phase	73
4.2.3	Mesure de la norme infinie de la fonction de sensibilité	74
4.2.4	Mesure de la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire	86
4.3	Critère fréquentiel	87
4.4	Solution itérative	88
4.5	Calcul des dérivées	92
4.5.1	Dérivée de la pulsation de croisement	92
4.5.2	Dérivée de la marge de phase	93
4.5.3	Dérivée de la marge de gain	94
4.5.4	Dérivée de la norme infinie de la fonction de sensibilité	95
4.5.5	Dérivée de la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire	96
4.6	Extension aux systèmes à non-minimum de phase	97
4.7	Exemples de simulation	99
4.7.1	Exemple 1 : Ajustement des marges de phase et de gain	100
4.7.2	Exemple 2 : Ajustement de la norme infinie des fonc- tions de sensibilité	103
4.8	Applications	105

4.8.1	Vases communicants	105
4.8.2	Transmission flexible	110
4.9	Conclusions	116
5	Ajustement itératif fondé sur un modèle	119
5.1	Introduction	119
5.2	Existence de solutions	120
5.3	Stabilité et performance robustes	126
5.3.1	Profil d'incertitudes	126
5.3.2	Stabilité robuste	127
5.3.3	Performance robuste	129
5.3.4	Exemple de simulation	131
5.3.5	Application	135
5.4	Extension aux systèmes multivariables	140
5.4.1	Configuration du système	142
5.4.2	Systèmes diagonalement dominants et analyse de sta- bilité	143
5.4.3	Procédure d'ajustement	145
5.4.4	Exemple de simulation	146
5.5	Conclusions	149
6	Conclusions	151
6.1	Contributions	151
	Curriculum vitæ	163

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivations

De nos jours, les systèmes physiques animés par une commande automatique sont très répandus dans l'industrie et ils nous côtoient également dans la vie quotidienne. Exprimé de manière très laconique, l'objectif premier de l'automatique est l'étude et la conception d'algorithmes appropriés, afin que la sortie mesurée d'un processus, appelée grandeur à commander, suive une trajectoire désirée, en dépit de perturbations éventuelles. Le développement récent de moyens informatisés, des processeurs et par conséquent de la puissance de calcul, ont considérablement amplifié l'utilisation de cette science pour la commande de processus.

La nature souvent très distincte des systèmes, ainsi que les différentes exigences formulées envers les performances requises, entraînent une demande de maintes stratégies, ayant une complexité et des objectifs variables. Le simple exemple d'une voiture de tourisme récente corrobore amplement ces propos. Une telle réalisation compte actuellement plusieurs dizaines de boucles de rétroaction d'essence très diverses. Parmi elles, on peut citer la commande de la température dans l'habitacle, qui n'est somme toute pas une application critique, mais relève exclusivement du confort des passagers. Dans ce cas, une variation de température d'un degré est à peine ressentie et peut être largement tolérée. Ainsi, le but du problème de régulation est de

garder la grandeur à commander plus ou moins proche de celle de consigne. D'un autre côté, l'injection de carburant constitue un système bien différent, contraint à d'autres performances. Pour assurer le bon fonctionnement du catalyseur et ainsi satisfaire les normes très strictes d'émission de gaz polluants, il est primordial d'injecter la quantité exacte d'essence assurant une proportion stœchiométrique. Les exigences envers la commande sont grandes, non seulement en terme de performances, puisqu'un écart significatif de la grandeur à commander n'est pas toléré, mais également en terme de robustesse, car l'algorithme doit pouvoir satisfaire au rôle imparti plusieurs années durant, et ce, malgré un vieillissement inéluctable des composants mécaniques.

Malgré un éventail très large de processus existants et malgré les diverses formulations envers les exigences requises, le régulateur proportionnel intégral dérivé (PID), dont l'architecture relativement dépouillée consiste en seulement trois termes distincts, s'est imposé dans plus de 90% des boucles de contre-réaction. La prédominance incontestée de ce type de commande provient, outre de sa simplicité extrême, des performances qu'il peut offrir aux systèmes en boucle fermée, satisfaisant très souvent les cahiers des charges, si ses paramètres sont choisis judicieusement. L'émergence, au début des années 1990, des techniques d'auto-ajustement a aussi amené un regain d'intérêt pour le PID dont plusieurs stratégies permettent son ajustement de façon automatisée.

La possibilité de percevoir le régulateur PID sous plusieurs angles radicalement différents explique que la littérature regorge de méthodes de synthèse, offrant une complexité et des performances très variables, pour répondre aux divers problèmes rencontrés. Le PID peut être vu, très intuitivement, comme un outil dont l'ajustement peut être accompli en considérant indépendamment l'effet produit par chacun de ses paramètres. Un tel regard débouche sur des règles et des formules empiriques encore très appréciées actuellement. Enfin, il peut être considéré sous différents aspects plus mathématiques dans le but d'optimiser ses performances ou d'être rendu robuste.

C'est dans cette dernière catégorie que se situe le travail relaté dans cet ouvrage. Plus particulièrement, l'ajustement est étudié dans le domaine fréquentiel, puisque cette représentation permet de juger directement la sta-

bilité et la robustesse du système en boucle fermée. De plus, comme plusieurs caractéristiques temporelles sont étroitement liées à des propriétés fréquentielles, la considération de ces dernières permet, lors de la synthèse, de prendre en compte la dynamique temporelle.

De manière grossière, les méthodes existantes peuvent être classifiées en deux catégories : la première considère l'ajustement en se basant sur un modèle du système à commander, alors que la seconde propose une synthèse directe, fondée sur les données obtenues directement à partir de mesures. Bien que ces deux domaines aient été diversement étudiés dans la littérature, aucune méthode ne constitue à ce jour la panacée universelle, et tous les problèmes n'ont de loin pas encore été résolus. Preuve en sont les récentes constatations, affirmant que les PID sont encore souvent mal ajustés dans l'industrie et qu'un gain de productivité non-négligeable est ainsi sacrifié. Une cause majeure est certainement que nombre de méthodes modernes ne sont peu ou pas utilisées, car souvent restreintes à un type de système bien particulier. Leur mise en œuvre est, de plus, régulièrement jugée trop complexe par la communauté industrielle. Enfin, certaines d'entre elles ne considèrent pas l'essence du problème, à savoir la stabilité, la robustesse ainsi que les performances temporelles.

La simplicité et la flexibilité de l'ajustement des PID sont à juste titre des paramètres importants qu'il convient de regarder avec une grande pondération. Les méthodes présentées dans cet ouvrage les considèrent toujours au premier plan. Ainsi, dans un premier volet, où l'ajustement direct est considéré, on se propose, par deux approches, l'une itérative et l'autre non, d'ajuster les marges de robustesse en ne requérant qu'une connaissance minimale du système à commander, obtenues à l'aide d'expériences en boucle fermée. En outre, la méthodologie de synthèse itérative se caractérise par une grande flexibilité, autant envers le choix des paramètres de synthèse, qu'envers la structure du système à commander et celle du régulateur. L'essence du problème est également considérée au premier chef dans le choix des paramètres de synthèse. Dans un deuxième temps est étudié l'ajustement axé sur un modèle. Plus particulièrement, les incertitudes intrinsèques à toute identification ou modélisation sont prises en compte de manière simple, pour garantir stabilité et performance robustes au système en boucle fermée. Plusieurs exemples de simulation ou d'expériences temps réel illustrent, tout

au long des chapitres, la simplicité des approches présentées ainsi que leur pertinence pour les problèmes d'automatique considérés.

1.2 État de l'art

Les méthodes d'ajustement fondées sur les mesures trouvent leur origine au début des années 1940 avec la méthode de Ziegler-Nichols [81]. Dans son approche fréquentielle, la démarche proposée consiste à identifier, en boucle fermée, le gain et la pulsation critique du système à commander. Le choix des paramètres du régulateur est alors donné par des formules d'essence empirique. Ces règles, très appréciées pour leur simplicité, sont aussi connues pour leurs résultats souvent modestes en terme de robustesse et de performances en poursuite de trajectoire. Plusieurs propositions ont d'ailleurs été émises par la suite, pour reformuler ces lois, jugées souvent inadéquates [35].

L'identification liée à la méthode de Ziegler-Nichols est délicate, car elle propose d'amener un système en boucle fermée à la limite de stabilité et de maîtriser les oscillations ainsi générées. En outre, cette procédure ne peut être réalisée de manière automatisée. Afin de contourner ces problèmes, une démarche, proposée en [5] et communément appelée méthode standard du relais, utilise, pour réaliser l'opération, une structure en rétroaction avec un élément tout-ou-rien. Cette idée constitue les prémisses de l'auto-ajustement de régulateurs PID. En incluant une hystérésis ou un retard pur dans le schéma [5, 12], d'autres points de la réponse harmonique du système à commander, ainsi que les fréquences associées, peuvent être identifiés. La méthode de Ziegler-Nichols modifiée propose alors de dimensionner le régulateur, de sorte que le point connu de la réponse harmonique de la boucle soit placé en une position désirée sur le plan complexe. La marge de phase ou de gain souhaitée peut alors être obtenue. Seuls deux paramètres sont nécessaires au régulateur pour cette affectation. Une contrainte liant alors les constantes d'intégration et de dérivation entre elles est émise de manière a priori à la synthèse. Le choix de cette contrainte a fait l'objet de plusieurs discussions, mais aucune n'a abouti à une solution universellement acceptée [7, 49, 71].

Différentes modifications de la méthode standard du relais ont permis

d'appliquer cette méthodologie aux systèmes en boucle fermée dans le but d'en extraire les marges de phase [53, 68] et de gain [7, 53]. D'aucuns ont proposé une amélioration de la précision de mesure en remplaçant le relais par une saturation accompagnée d'un gain variable [66, 67]. Une autre approche, axée sur l'utilisation d'un module d'identification PLL¹ [13], permet également une estimation de ces marges de robustesse en ligne. Ces procédures ont alors motivé l'ajustement direct et itératif des marges. En [17], un algorithme empirique est formulé pour une telle synthèse. La méthode d'optimisation utilisée, de type simplex, souffre cependant d'une convergence relativement lente. Le même but est également proposé en [13]. Seuls les régulateurs de type PI peuvent cependant être considérés par les deux approches précitées. Une version fréquentielle de la méthode bien connue sous le nom d'IFT² a été présentée en [40] dans le but d'imposer la marge de phase et la bande passante désirées. La marge de gain ne peut cependant pas être prise en compte par cette approche.

Il est unanimement reconnu que les normes infinies des fonctions de sensibilité constituent de meilleurs indicateurs de stabilité et de performance que les marges classiques de robustesse. Ce fait a motivé l'emploi de contraintes relatives à ces normes pour l'ajustement des PID. Cependant, seule une attention modérée y a été portée dans le cadre d'un ajustement sans modèle du système à commander. En [7], la méthode dite de Kappa-Tau, de nature empirique, propose de simples lois d'ajustement qui attribuent à un système inconnu approximativement une valeur donnée pour la norme infinie de la fonction de sensibilité. Ce dimensionnement n'est basé que sur l'identification de deux points de la réponse harmonique du système à commander. Une méthode de mesure axée sur l'approche PLL est offerte en [14] pour mesurer la norme infinie de la fonction de sensibilité. Un algorithme ad hoc [15] est alors formulé pour tenter d'imposer la valeur de ce paramètre de synthèse ainsi que de la marge de phase, dans le cas particulier d'un régulateur PI. Un schéma axé sur la méthodologie du relais a également été donné en [18, 19] pour estimer différents points de la réponse harmonique de la fonction de sensibilité, mais il ne permet cependant pas d'extraire la norme infinie de cette fonction. En outre, aucune de ces méthodes ne permet de considérer la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire en

¹de l'anglais *Phase Locked Loop*

²de l'anglais *Iterative Feedback Tuning*

tant que paramètre de synthèse.

L'imposition des marges de robustesse a également été considérée par des méthodes utilisant un modèle du système à commander. Les marges de phase et de gain ont tout d'abord été considérées en présupposant l'existence d'un modèle de premier [38, 76] ou de second ordre [63, 75] avec retard pur, pouvant être identifié facilement à l'aide de la connaissance du gain statique ainsi que d'un ou de plusieurs points de la réponse harmonique, obtenus à l'aide d'un test du relais. L'imposition des marges conduit à la résolution d'équations non linéaires trigonométriques. Des méthodes graphiques traditionnelles, utilisant les diagrammes de Bode, permettent de résoudre le problème, mais ne sont pas souhaitées dans un cadre d'auto-ajustement. Des approches plus récentes essaient de résoudre le problème de manière numérique [77] ou encore en simplifiant les équations par des estimations [38, 39]. Le principal désavantage de ces procédures est finalement que les spécifications ne sont pas satisfaites sur le système réel, à cause des approximations faites lors de l'identification ou de la résolution des équations.

Les normes infinies des fonctions de sensibilité ont également été considérées dans ce contexte. En [4, 68], des optimisations sont proposées pour maximiser le rejet de perturbations de régulateurs PI et respectivement PID, en fixant des contraintes sur les fonctions de sensibilité. La minimisation numérique d'un index de performance utilisant les marges précitées a été considérée en [37], tandis qu'en [61] des expressions simples sont offertes pour tenter de borner la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire pour des modèles d'ordre restreint. Enfin, en [80] ces marges sont considérées avec une classe spéciale de PID munis de deux paramètres d'ajustement.

Des incertitudes sont inéluctablement associées à une modélisation d'un système. Cependant, seules des solutions très fragmentaires, prenant en compte explicitement ces incertitudes dans le cadre des PID, jonchent la littérature. La méthode IMC, [50, 57] adaptée aux régulateurs PID, permet seulement lorsque le processus est décrit par un modèle de premier ordre, de concevoir un régulateur garantissant une stabilité robuste à la boucle fermée. La performance robuste ne peut y être traitée. Seul cet indicateur de robustesse est par contre considéré en [59], en appliquant l'idée découlant

de la méthodologie QFT³ [41], mais seulement pour le dimensionnement d'un régulateur PI. D'un autre côté, les méthodes H_∞ [21] permettent de résoudre le problème de robustesse, mais les régulateurs qui en découlent ne sont aucunement d'ordre restreint. De plus, l'approche n'est pas directement applicable aux processus caractérisés par un retard pur.

1.3 Objectifs

L'objectif de la thèse est de proposer des méthodes simples et innovantes pour l'ajustement des régulateurs PID.

1.3.1 Méthodes fondées sur des mesures

Les méthodes directes sont certainement celles qui suscitent le plus d'intérêt pour l'ajustement des PID, car elles ne nécessitent aucune identification paramétrique, souvent compliquée et difficilement réalisable de manière automatique. Conséquemment, une grande partie de ce travail se consacre à cet aspect.

L'objectif ici est de pouvoir offrir plusieurs stratégies de complexité et de flexibilité différentes pour répondre de manière opportune à un grand nombre de problèmes d'automatique. Comme il a été mentionné auparavant, la simplicité de l'ajustement est primordiale. Ainsi, il est souhaité de ne devoir extraire du système à commander, que seulement quelques informations nécessaires au dimensionnement.

Les paramètres de synthèse doivent pouvoir être choisis de sorte à représenter l'essence du problème automatique, à savoir stabilité, robustesse et performance. Ainsi, il est souhaité de pouvoir utiliser, lors de l'ajustement, les normes infinies des fonctions de sensibilité, seulement marginalement adoptées dans les méthodes directes existantes. De plus, différentes valeurs doivent pouvoir être spécifiées, de sorte à satisfaire aux exigences de nombre de cahiers des charges.

Les objectifs peuvent être formulés de manière plus quantitative. Une première approche d'ajustement est dérivée de la méthode modifiée de Ziegler-Nichols [7]. En brisant la contrainte fixée de manière a priori entre la

³de l'anglais *Quantitative Feedback Theory*

constante d'intégration et de dérivation du régulateur, il est possible de fixer la pente de la réponse harmonique de la boucle à la pulsation de croisement. Un premier objectif est de l'ajuster en ayant recours à un minimum d'informations du système à commander. Enfin, le choix de cette valeur influence sévèrement la robustesse et les performances du système en boucle fermée. Il doit donc pouvoir être fait de sorte à améliorer le calibrage de la boucle en fonction des exigences formulées. Il en résulte ainsi une méthode très facile à mettre en œuvre, car la simplicité de la procédure de Ziegler-Nichols est conservée, mais des résultats largement supérieurs peuvent en découler.

Une deuxième visée consiste à pouvoir mesurer en boucle fermée les marges de robustesse d'un système dans le but d'ajuster leur valeur. Les méthodes du relais permettent de mesurer les indicateurs classiques de robustesse, mais pas les normes infinies des fonctions de sensibilité. Une étude est ainsi menée en ce sens. Une fois ces paramètres mesurés, un critère fréquentiel, défini par la somme pondérée des différences au carré entre les valeurs mesurées et spécifiées, est utilisé à des fins d'optimisation. Il est ambitionné de pouvoir minimiser ce critère en quelques itérations seulement et dans un but de simplicité, sans avoir recours à d'autres connaissances du système qu'à celles obtenues par les mesures précitées.

1.3.2 Méthodes fondées sur un modèle du système à commander

Lorsqu'un modèle du système à commander existe, les différentes marges de robustesse peuvent être ajustées à l'aide de méthodes déjà existantes. Ces dernières ne peuvent, très souvent, pas tenir compte des incertitudes liées au modèle de manière explicite. Or, dans le cadre d'une commande PID, les incertitudes peuvent jouer un rôle prépondérant, car les modèles utilisés sont souvent d'ordre réduit et en contiennent passablement, du fait notamment de dynamiques non modélisées. Par leur faute, les propriétés obtenues à partir d'un modèle nominal ne sont pas satisfaites sur le système réel. Ainsi, on se propose, dans ce travail, de tenir compte simplement des incertitudes pour garantir stabilité et performance robustes au système réel.

1.4 Structure du mémoire

Cet ouvrage est organisé de la manière suivante.

Le chapitre 2 rappelle quelques notions de base, dans le but de simplifier la compréhension de ce qui suivra. Les variantes du PID qui, in fine, constitue le pilier de base sur lequel toutes les approches proposées sont bâties, sont tout d'abord brièvement évoquées. Il sera en outre rappelé qu'il n'existe pas une, mais bien plusieurs structures PID présentant des spécificités quelque peu différentes. Toutes ces expressions pourront être prises en compte par les méthodes de synthèse présentées. La question de savoir quand un régulateur PID se révèle être une solution opportune à un problème existant est ensuite brièvement évoquée. Les paramètres de synthèse qui seront utilisés par la suite sont présentés et leur importance est soulignée. Enfin, les fondements de la méthode standard du relais, ainsi que les hypothèses que son utilisation présuppose, sont considérés en fin de chapitre.

Le chapitre 3 est consacré à une méthode d'ajustement non itérative, réalisée sans modèle du système à commander et dérivée de la méthode de Ziegler-Nichols modifiée. Cette dernière propose, en ne mesurant qu'un seul point de la réponse harmonique du système à commander, d'imposer une marge de phase souhaitée. Il est montré comment il est possible de calibrer plus amplement, pratiquement sans informations supplémentaires, la réponse harmonique de la boucle à la pulsation de croisement en utilisant à cette fin des informations découlant des intégrales de Bode. Le choix de la pente est finalement motivé par l'emploi de contraintes sur les normes infinies des fonctions de sensibilité.

Le chapitre 4 est consacré à une procédure de synthèse itérative, réalisée sans modèle du système à commander. Il est tout d'abord expliqué comment, en utilisant la méthodologie du relais, il est possible d'estimer directement les marges de robustesse du système. L'ajustement est ensuite axé sur ces mesures en utilisant, à des fins d'optimisation, un critère fréquentiel. Sa minimisation est basée sur une procédure de type gradient dont les détails sont ensuite explicités. En outre, on montrera comment les dérivées du critère peuvent être estimées, sans nécessiter le recours à un modèle.

Finalement, l'ajustement basé sur un modèle est considéré au chapitre 5. Une représentation paramétrique du système est tout d'abord utilisée

pour étudier brièvement le problème d'optimisation présenté dans le chapitre précédent et pour tirer quelques conclusions sur les solutions obtenues. Enfin, il est montré comment les incertitudes rattachées à toute identification peuvent être prises en compte simplement lors du dimensionnement. Une application intéressante de cette méthodologie est donnée, par la suite, pour la réalisation d'une commande décentralisée relative aux systèmes multivariables.

Chaque chapitre présenté dans ce mémoire est en outre étayé d'exemples de simulation et de résultats d'application temps réel illustrant les démarches méthodologiques.

Enfin, et pour conclure, le chapitre 6 revient sur les contributions de la thèse. Les points forts et faibles des approches présentées sont passés succinctement en revue.

Chapitre 2

Notions préliminaires

2.1 Introduction

Le travail relaté dans cet ouvrage fait appel à quelques notions de base qui, pour faciliter la lecture et la compréhension de ce qui suivra, sont exposées dans ce chapitre.

Tout d'abord les différentes structures du régulateur PID utilisées tout au long du mémoire sont présentées. Par la suite est brièvement considérée la question de savoir quand l'utilisation d'un régulateur PID s'avère judicieuse. Ces points sont abordés en section 2.2.

Le choix des paramètres de synthèse joue un rôle crucial sur les performances obtenues. Les relations entre les différentes spécifications potentielles et les concepts de stabilité, performance ainsi que robustesse, sont ensuite rappelés en section 2.3. Elles permettront notamment de justifier la sélection des paramètres utilisés dans les chapitres ultérieurs. Dans les deux premières sections, les différentes notions courantes proviennent en grande partie d'ouvrages de base d'automatique [6, 7, 9, 52].

Les procédures d'ajustement ne nécessitant pas de modèle du système à commander se fondent sur des mesures obtenues à l'aide d'expériences non linéaires. Les différents concepts, inspirés d'œuvres traitant des systèmes non linéaires [24, 69], et permettant l'analyse de ces tests sont développés en section 2.4. Finalement, la méthode standard du relais, ainsi qu'un

schéma plus avancé amenant une amélioration de la précision de mesure, sont évoqués en fin de chapitre.

2.2 Régulateur PID

2.2.1 Structures du régulateur

Le comportement du régulateur proportionnel intégral dérivé (PID) standard peut être décrit par l'équation suivante :

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (2.1)$$

où $u(t)$ désigne le signal de commande et $e(t)$ l'écart résultant de la différence entre la consigne et la grandeur à commander. Ainsi, le signal de commande découlant de l'algorithme décrit ci-dessus est composé de la somme de trois termes distincts qui, de par la fonction remplie, sont logiquement dénommés respectivement terme proportionnel, intégral et dérivé. Les paramètres du régulateur associés à ces différents termes sont le gain proportionnel K_p , la constante d'intégration T_i et la constante de dérivation T_d .

Les trois termes proportionnel, intégral et dérivé possèdent des caractéristiques différentes et agissent de manière complémentaire. Seule une description succincte de leurs propriétés en boucle fermée, basée sur une argumentation intuitive, est donnée ici.

La partie proportionnelle constitue la forme la plus élémentaire de rétroaction, où le signal de commande est simplement l'écart entre la consigne et la grandeur à commander, multiplié par le gain K_p . L'intuition veut qu'en augmentant ce gain, le signal de commande agisse de manière plus forte sur le système et ainsi atténue plus rapidement l'écart. D'un autre côté, un régulateur agissant trop fortement donnera naissance à des comportements oscillatoires, témoins d'une diminution, voire d'une perte de stabilité. L'apparition d'un signal de commande non nul, dans le cas d'un régulateur proportionnel, est soumise à l'existence d'un écart entre la consigne et la grandeur à commander. Ainsi, l'utilisation de cette commande provoque généralement un statisme. La suppression de celui-ci est assurée par l'utilisation du terme intégral. Ce dernier génère, à partir d'un moindre signal d'erreur de signe constant, une commande dont l'amplitude ne cesse de

croître. Cela aura pour conséquence de supprimer tout écart permanent. Pour cette raison, le terme intégral est souvent interprété dans la littérature comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du régulateur. Le revers de la médaille est l'effet déstabilisant qu'il engendre. Au contraire, l'objectif premier de l'élément dérivé est d'accroître la stabilité en boucle fermée. Les mécanismes d'instabilité peuvent être expliqués de manière très intuitive par la dynamique du système à commander. Lorsqu'un signal de commande est appliqué au processus, un certain temps est nécessaire pour que celui-ci agisse sur la grandeur à commander. Le régulateur opère donc trop tard sur le processus pour corriger l'écart qu'il perçoit. Lorsqu'en un temps donné, l'erreur mesurée augmente, on peut logiquement supposer, qu'à un instant suivant, elle sera encore plus grande. L'idée du terme dérivé est donc de prédire l'erreur future afin de pouvoir la corriger directement, sans attendre son apparition. Un régulateur proportionnel dérivé peut être interprété comme une correction proportionnelle agissant sur l'erreur prédite, où la prédiction est faite en ajoutant à l'écart momentané sa dérivée pondérée par le facteur T_d (extrapolation linéaire).

L'algorithme du régulateur PID tel que décrit en équation (2.1) peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$K(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.2)$$

Plusieurs variations de la formulation standard du régulateur sont couramment utilisées afin d'augmenter ses performances ou d'en faciliter le dimensionnement. Force est de constater que, dans sa version standard, les paramètres du régulateur n'apparaissent pas de manière linéaire dans la fonction de transfert. Les raisons fondamentales pour lesquelles le régulateur est le plus souvent décrit de cette façon sont de nature historique et proviennent de son comportement dynamique : si on considère un signal d'écart constant $e(t) \equiv 1$ en entrée, une grandeur de commande constante est obtenue par le terme proportionnel, alors que le terme intégral génère une rampe. Le temps $t = T_i$ correspond à celui où la sortie du terme intégral est de même amplitude que celle du terme proportionnel. De même, si on considère un signal d'écart en forme de rampe en entrée du régulateur, au temps $t = T_d$, l'amplitude des signaux de commande provenant des termes proportionnel et dérivé sera égale.

Une expression équivalente, où les paramètres apparaissent de manière linéaire, est souvent plus appréciée pour les calculs analytiques. Une telle formulation est donnée par la forme parallèle :

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \quad (2.3)$$

Les gains d'intégration K_i et de dérivation K_d sont liés aux paramètres de la forme standard par les relations suivantes :

$$K_i = \frac{K_p}{T_i} \quad (2.4)$$

$$K_d = K_p T_d \quad (2.5)$$

D'autres variations de la formulation standard sont couramment utilisées afin d'augmenter les performances en boucle fermée du régulateur PID. L'ajout d'un filtre dans le terme dérivé est souvent adopté en pratique. Il en résulte la fonction de transfert suivante :

$$K(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N} s + 1} \right) \quad (2.6)$$

Outre le fait de rendre la fonction de transfert causale, ce filtre permet souvent d'éviter les difficultés inhérentes à la dérivation, liées à l'amplification du bruit de mesure. Le nombre N est généralement fixé avant la synthèse stricto sensu du régulateur. Des valeurs entre 3 et 20 sont communément adoptées en pratique [52].

Les systèmes industriels sont caractérisés par des non-linéarités plus ou moins marquées. Notamment les saturations présentes dans tout actuateur peuvent avoir des conséquences indésirables sur le comportement du système en boucle fermée. Lorsqu'un actuateur est en saturation, le régulateur PID perd toute son efficacité, car la grandeur de commande calculée est physiquement impossible à délivrer. Plusieurs variantes couramment utilisées permettent au régulateur de tenir compte de ces limitations de la commande. L'une d'elles consiste à éviter, lors de brusques variations de la consigne, d'entrer en saturation. C'est principalement le terme dérivé qui est responsable de ces larges amplitudes de la commande. Une solution est de dériver, non pas l'écart entre la consigne et la grandeur à commander, mais directement la grandeur à commander. Un autre moyen dénommé en

anglais *anti-reset windup* permet, lorsque la grandeur de commande a atteint sa limite physique, d'éviter les problèmes non linéaires liés au terme intégral. En outre, il dispense de devoir considérer les saturations lors de la synthèse du régulateur, ce qui impliquerait l'utilisation d'outils non linéaires avancés. Une description détaillée de ces variantes «industrielles» du régulateur PID est disponible dans les ouvrages de base d'automatique [7, 52].

Bien que les versions non causales du régulateur PID telles que représentées en équations (2.2) et (2.3) ne sont que rarement implantées pour la commande de systèmes industriels, la plupart des méthodes d'ajustement existantes dans la littérature les considèrent pour le calcul du régulateur. Les différentes modifications structurelles comme, par exemple, l'ajout d'un filtre dans le terme dérivé, même si elles sont implantées lors de la réalisation, ne sont, très souvent, pas considérées lors de la synthèse. Les effets qui en résultent sont alors négligés. Dans cet ouvrage, uniquement dans le chapitre 3, où des expressions analytiques sont offertes, l'hypothèse est faite que le régulateur est décrit par sa fonction de transfert standard, exposée en équation (2.2). Pour les méthodes itératives des chapitres 4 et 5, la seule supposition formulée est que le régulateur est décrit par une fonction de transfert stable. En conséquence, ces méthodes sont très flexibles et ne sont pas restreintes à une structure bien particulière de PID.

Malgré une synthèse analogique, notons finalement que l'implantation d'un régulateur se fait, de nos jours, quasiment exclusivement de manière digitale. Il convient donc de numériser le régulateur avant de l'appliquer. Plusieurs questions devront alors être considérées dont les plus importantes auront trait au choix de la période d'échantillonnage, à la méthode de numérisation et aux problèmes de quantification [6, 52].

2.2.2 Forces et faiblesses

Lorsqu'une structure en rétroaction doit être utilisée, il est légitime de se poser les questions suivantes : pourquoi utiliser un régulateur de type PID ? Une telle architecture est-elle suffisante pour la commande du processus considéré ? Bien qu'à ce jour il n'existe aucune caractérisation formelle des systèmes pour lesquels l'utilisation de régulateurs PID s'avère judicieuse, des réponses partielles à ces questions peuvent être trouvées dans la littérature.

L'un des points forts du régulateur PID est indéniablement sa structure d'ordre restreint qui ne dépend pas de celle du système à commander, contrairement à beaucoup d'autres types de régulateurs. En [8], les auteurs s'étonnent même qu'avec une stratégie de commande si simple, on puisse obtenir autant de performances. Ils soulignent notamment que la rétroaction en soi est une idée puissante, amenant une forte plus-value à la dynamique du système et que la structure particulière du régulateur n'est souvent pas déterminante. Par conséquent, la majorité des applications se contente d'une forme simple de contre-réaction qui suffit à induire les différents avantages de la commande en boucle fermée. Le régulateur PID constitue donc, de par sa structure élémentaire, la première solution qui doit être envisagée lors d'une commande automatique.

L'effort et le temps requis pour la synthèse d'un régulateur sont des aspects importants qu'il convient de prendre en compte lors du choix de la commande. La majorité des stratégies donnant naissance à une rétroaction complexe, dont la structure dépend de celle du système à commander, part de l'hypothèse qu'un modèle précis et complet du processus est disponible sous la forme d'une fonction de transfert ou d'une réponse harmonique. L'obtention d'une représentation in extenso demande cependant un effort d'identification ou de modélisation considérable. De plus, malgré les progrès réalisés, ces démarches exigent un savoir-faire et ne peuvent souvent pas être réalisées de manière automatique. Le temps, ainsi que les ressources mises à disposition, génèrent encore, dans beaucoup de situations, un intérêt marqué pour les méthodes aboutissant rapidement à la réalisation de la commande. Là encore, le PID tire son épingle du jeu. Comme le nombre de termes à ajuster est restreint, il est souvent souhaité de caractériser le processus par un nombre limité de paramètres. Ainsi, les systèmes sont souvent décrits par un modèle de premier ou de second ordre avec un retard pur obtenu suite à une procédure d'identification sommaire. Lors d'ajustements dans le domaine fréquentiel, la connaissance du système n'est requise que dans des plages fréquentielles bien définies. L'émergence de procédures d'auto-ajustement, comme celles proposées dans les chapitres ultérieurs, a permis de fournir des instruments de mesure afin d'obtenir ces informations de manière simple.

Quant à la question de savoir si un régulateur PID est suffisant pour le

contrôle d'un système considéré, une étude qualitative est proposée en [7]. Elle souligne que, lorsque la dynamique d'un système est essentiellement du premier ordre, un régulateur PI est adéquat. C'est également le cas pour une architecture PID, quand la dynamique dominante est du second ordre. Pour ces systèmes, aucun gain signifiant n'est obtenu par l'emploi d'un régulateur plus complexe. Par contre, si l'ordre du système est plus élevé, les performances peuvent être améliorées par l'utilisation d'autres architectures de contre-réaction. Il résulte également des performances limitées lors de l'emploi de PID avec des systèmes possédant des modes oscillants, spécialement si ceux-ci se trouvent dans la bande passante du système en boucle fermée. Les systèmes dominés par un retard pur engendrent évidemment des difficultés. La prédiction linéaire de l'écart futur par le terme dérivé ne permet pas de résoudre le problème de manière satisfaisante. L'utilisation additionnelle d'un prédicteur de Smith [52] améliore cependant grandement les performances en poursuite. La structure linéaire du contrôleur PID n'est pas adaptée aux systèmes fortement non linéaires. Parfois, d'excellents résultats peuvent néanmoins être obtenus avec une commande à gains programmés [3]. Si les non-linéarités sont dues aux saturations des actionneurs, un point fort du régulateur PID est de pouvoir en tenir compte facilement par l'implantation d'un *anti-reset windup*. Enfin, bien que plusieurs méthodes d'ajustement de PID soient proposées dans la littérature pour commander les systèmes instables [25, 42, 54, 55], les performances obtenues sont souvent modestes.

Notons finalement que les exigences en terme de performances ne sont, pour beaucoup d'applications, pas très élevées. Bien que ces dernières puissent parfois être largement augmentées par l'utilisation d'une stratégie de commande plus complexe, le PID permet souvent, lorsque ses paramètres sont ajustés de manière judicieuse, de remplir le cahier des charges à entière satisfaction. Ceci explique pourquoi il est très souvent préféré à d'autres structures et qu'il est utilisé, malgré la complexité de nombreux systèmes industriels, dans la grande majorité des boucles de rétroaction.

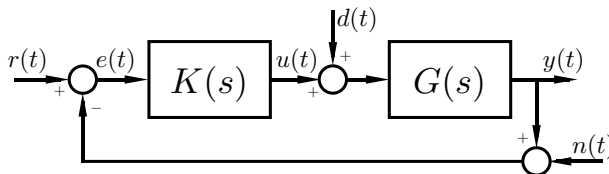


FIG. 2.1 – Schéma fonctionnel d'une commande automatique standard.

2.3 Spécifications pour l'ajustement

Maintenant que le régulateur PID a été décrit brièvement, les spécifications qui seront proposées dans les chapitres suivants pour la synthèse du régulateur peuvent être considérées. À l'instar de nombreuses méthodes disponibles dans la littérature, celles qui sont offertes dans les chapitres ultérieurs se fondent sur des spécifications fréquentielles. Il est donc utile de rappeler ici l'importance de ces caractéristiques. Elles seront utilisées pour refléter aussi bien la stabilité et la robustesse du système bouclé que ses performances temporelles.

Le schéma fonctionnel de la figure 2.1 représente une commande automatique standard où $K(s)$ et $G(s)$ sont respectivement les fonctions de transfert du régulateur et du système à commander. Différentes entrées agissent sur le système en boucle fermée. r représente la consigne, tandis que d et n décrivent respectivement une perturbation à rejeter ainsi que le bruit de mesure. La grandeur à commander y , l'écart e ainsi que la grandeur de commande u sont les autres signaux présentant un intérêt pour l'analyse. Le signe « $-$ » associé au bruit de mesure n'a été introduit que pour simplifier l'écriture par la suite. Beaucoup de commandes automatiques peuvent être représentées par le schéma de la figure 2.1, notamment celles faisant intervenir un régulateur PID. Bien qu'en réalité les perturbations puissent entrer dans la boucle de différentes manières, on considère ici, par souci de simplicité, qu'elles interviennent en amont du système à commander. L'analyse faite à partir de cette représentation est cependant très représentative. Les conséquences qui en découlent n'en sont pas modifiées si la configuration devient quelque peu changer.

Le but de la synthèse du régulateur est de déterminer une fonction de

transfert $K(s)$, de sorte que la grandeur à commander soit proche de la consigne en dépit de la présence de perturbations, de bruits de mesure et éventuellement de légères modifications de la dynamique du système à commander, au cours du temps. Pour déterminer quelles sont les spécifications fréquentielles qu'il convient de considérer lors de la synthèse afin d'obtenir un comportement adéquat du système, il faut étudier les relations fondamentales entre les entrées r , d et n , la sortie y et les variables internes e et u . Comme le système considéré est linéaire, ces liens de cause à effet peuvent être exprimés à l'aide de fonctions de transfert. Soit $R(s)$, $E(s)$, $U(s)$, $D(s)$, $Y(s)$ et $N(s)$ les transformées de Laplace respectives de $r(t)$, $e(t)$, $u(t)$, $d(t)$, $y(t)$ et $n(t)$ et $L(s)$ la fonction de transfert de la boucle :

$$L(s) = K(s)G(s) \quad (2.7)$$

Les relations suivantes peuvent aisément être obtenues à partir du schéma de la figure 2.1 :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{L(s)}{1 + L(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + L(s)}D(s) + \frac{L(s)}{1 + L(s)}N(s) \\ E(s) &= \frac{1}{1 + L(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + L(s)}D(s) + \frac{1}{1 + L(s)}N(s) \\ U(s) &= \frac{K(s)}{1 + L(s)}R(s) - \frac{L(s)}{1 + L(s)}D(s) + \frac{K(s)}{1 + L(s)}N(s) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Il convient de noter que plusieurs fonctions de transfert intervenant dans ces équations sont identiques. Ainsi, seul un nombre réduit de fonctions de transfert, dénommées le «gang des quatre» [9], suffit à décrire entièrement les relations entre les entrées, les variables internes et la sortie du système :

$$\begin{array}{cc} \frac{L(s)}{1 + L(s)} & \frac{1}{1 + L(s)} \\ \frac{G(s)}{1 + L(s)} & \frac{K(s)}{1 + L(s)} \end{array} \quad (2.9)$$

2.3.1 Stabilité

Une commande en rétroaction amène très souvent une plus-value considérable pour la dynamique du système. L'un des grands désavantages qu'elle

peut cependant engendrer, est une perte de stabilité. Lors d'apparitions d'un tel phénomène, la grandeur à commander n'est plus maîtrisable et des conséquences désastreuses s'ensuivent parfois. La stabilité est donc une propriété fondamentale que doit satisfaire toute commande automatique.

Si les quatre fonctions de transfert représentées en (2.9) sont stables, alors le système de la figure 2.1 possède la propriété de stabilité interne [9]. Si les trois entrées du système considéré sont bornées en amplitude, cette propriété implique que la sortie ainsi que les variables internes le sont également. La stabilité interne est un concept plus fort que celui de la stabilité BIBO (de l'anglais *bounded input, bounded output*). Cette dernière ne met en jeu que les signaux d'entrée et de sortie. L'idée sous-jacente à la définition de la stabilité interne est la constatation que la relation entrée-sortie peut être stable et engendrer des sorties bornées, alors même que les signaux internes, comme la grandeur de commande, peuvent, dans certaines situations, ne pas être stables, et occasionner des dommages au système physique.

La stabilité interne du système considéré en figure 2.1 peut également être montrée à l'aide du critère de Nyquist. Ce critère, de nature géométrique, permet, en visualisant la réponse harmonique de la boucle dans le plan complexe, de déterminer la stabilité du système en boucle fermée [52, 72]. Un bref rappel de ce critère est énoncé ci-après.

Le critère de Nyquist consiste en une interprétation du principe de l'argument, utilisant le contour de Nyquist C . Ce dernier parcourt l'axe imaginaire du plan complexe de $-j\infty$ à $+j\infty$ ainsi qu'un demi-cercle de rayon infini qui englobe tout le demi-plan des valeurs réelles positives. Dans le cas où la fonction de transfert de la boucle $L(s)$ possède un ou plusieurs pôles sur l'axe imaginaire, le contour de Nyquist C évitera ces points par des demi-cercles de rayon infiniment petit centrés en ces points. La figure 2.2 montre le contour C dans la situation où la boucle possède un ou plusieurs pôles à l'origine. Cette situation est particulièrement importante dans le cadre du régulateur PID, vu que celui-ci possède un intégrateur. Lorsque s parcourt une fois le contour C , $L(s)$ décrit une courbe appelée diagramme de Nyquist. Le critère de Nyquist peut alors être formulé de la manière suivante: soit m le nombre total de pôles instables de la boucle. Le système en boucle fermée est BIBO stable si et seulement si le diagramme de Nyquist évite le point critique -1 et l'encercle exactement m fois dans le sens tri-

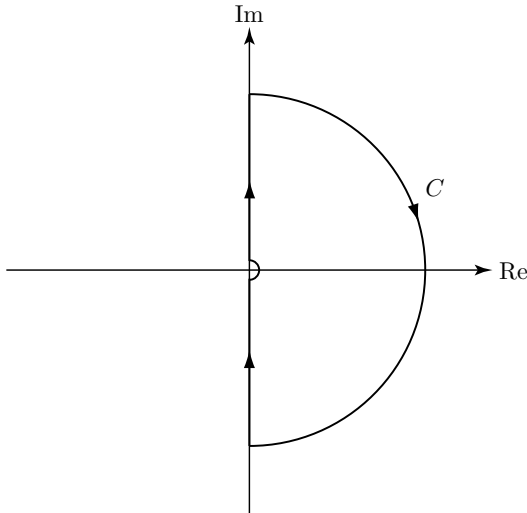


FIG. 2.2 – Contour de Nyquist.

gonométrique direct (sens inverse des aiguilles d'une montre). Si, de plus, il n'y a pas d'annulation de pôles et de zéros en $\text{Re } s \geq 0$ lorsque le produit $K(s)G(s)$ est formé, le système en boucle fermée possède la propriété de stabilité interne [21].

La majorité des systèmes industriels est généralement stable et le régulateur PID ne possède pas de pôle strictement instable. Ainsi, pour ces systèmes, le critère de Nyquist simplifié permet d'exprimer la stabilité de manière aisée et son emploi s'en trouve largement facilité : le système est BIBO stable, si le point critique -1 est laissé à gauche de la réponse harmonique de la boucle quand la pulsation $\omega \in [0, \infty)$.

Le régulateur PID, dans sa forme standard, possède un pôle à l'origine et aucun zéro instable pour autant que T_i et T_d soient positifs. Des valeurs négatives pour ces constantes n'ont par ailleurs aucun sens physique et ne sont pas souhaitées. En conséquence, si la fonction de transfert du système à commander ne possède pas de zéros à l'origine, aucune simplification de pôles de zéros instables n'est faite lors de la construction de la boucle et le critère simplifié de Nyquist garantit la stabilité interne du système bouclé.

Le critère de Nyquist simplifié est un outil très utilisé pour démontrer

la stabilité lors de la synthèse d'un régulateur d'ordre réduit. Les méthodes proposées aux chapitres suivants s'appuient sur ce critère.

2.3.2 Robustesse et marges de stabilité

La stabilité d'une commande automatique est une condition nécessaire pour le bon fonctionnement du système. Elle ne constitue cependant pas une condition suffisante. Le système à commander est potentiellement sujet à de lentes variations de sa dynamique au cours du temps. Il est primordial que celles-ci ne brisent pas la stabilité. De manière plus générale, un objectif de la rétroaction est de rendre le système bouclé robuste à ces fluctuations, aussi bien en stabilité qu'en performances. La considération de différentes marges lors de la synthèse du régulateur permet d'obtenir cette robustesse vis-à-vis des incertitudes entourant le système à commander.

Pour assurer une robustesse en stabilité, il ne suffit pas de laisser le point critique sur la gauche de la réponse harmonique de la boucle. Il est nécessaire également de garder une certaine distance minimale entre la courbe et le point -1 .

Une des fonctions de transfert du «gang des quatre» représenté en (2.9), est dénommée fonction de sensibilité S :

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} \quad (2.10)$$

Cette dernière revêt une importance majeure au niveau de la robustesse et permet d'exprimer cette distance minimale. La norme infinie de la fonction de sensibilité :

$$M_s = \|S\|_\infty = \sup_\omega \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| \quad (2.11)$$

représente tout simplement l'inverse de la distance minimale du point critique à la réponse harmonique de la boucle :

$$M_s^{-1} = \inf_\omega |1 + L(j\omega)| \quad (2.12)$$

Une interprétation géométrique, dans le plan complexe, du paramètre M_s est représentée en figure 2.3 : la réponse harmonique de la boucle est tangentielle au cercle de rayon M_s^{-1} centré sur le point critique, et n'entre à aucun endroit dans celui-ci.

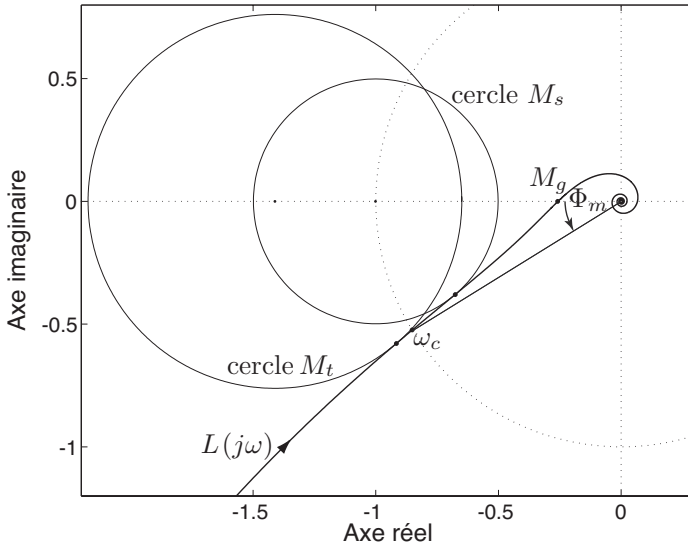


FIG. 2.3 – Interprétation géométrique des paramètres de synthèse.

En présence d'incertitudes non linéaires, M_s est également un indicateur privilégié de robustesse. Si une fonction statique f est insérée dans la boucle, il peut être démontré, par le critère du cercle [48], que le système bouclé demeure stable pour autant que la non-linéarité est bornée par deux droites, telles que [48] :

$$\frac{M_s}{M_s + 1} < \frac{f(x)}{x} < \frac{M_s}{M_s - 1} \quad (2.13)$$

En plus d'être robuste en stabilité, une boucle fermée doit l'être en performance. En d'autres termes, le comportement de la grandeur à commander ne doit pas être sensible aux lentes fluctuations de la dynamique du système à commander. La dynamique entre la consigne et la grandeur à commander est donnée par l'une des fonctions de transfert exposée en (2.9), dénommée fonction de sensibilité complémentaire $T(s)$:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} \quad (2.14)$$

Le changement du comportement du système en boucle fermée lors de va-

riations (infiniment petites) du processus peut être représenté par les expressions suivantes [21] :

$$\frac{dT(G)}{dG} = \frac{K}{1+KG} - \frac{K^2G}{(1+KG)^2} = \frac{1}{1+KG} \frac{K}{1+KG} \quad (2.15)$$

D'où :

$$\frac{dT(G)}{dG} = S \frac{T}{G} \quad (2.16)$$

A partir de l'équation précédente, le résultat suivant est finalement obtenu :

$$\frac{dT}{T} = S \frac{dG}{G} \quad (2.17)$$

Ainsi, pour de faibles modifications de la dynamique du système à commander, la fonction de sensibilité joue un rôle prépondérant pour décrire les changements de celles du système en boucle fermée. Le système se verra moins affecté par un changement du processus aux fréquences où le module de la sensibilité est faible. Il est donc important, non seulement pour la robustesse en stabilité, mais également pour celle en performance, de pouvoir contrôler la norme infinie de la fonction de sensibilité et ainsi la distance minimale entre $L(j\omega)$ et le point critique.

Deux autres marges de robustesse sont également d'une importance majeure pour la synthèse des régulateurs PID : celles-ci sont les marges de phase Φ_m et de gain M_g . Ces indicateurs mesurent le niveau de stabilité dans certaines directions spécifiques. Ainsi, la marge de phase représente la distance en radians entre le point critique et la réponse harmonique de la boucle, le long du cercle unité :

$$\Phi_m = \pi - \angle L(j\omega_c) \quad (2.18)$$

où ω_c , appelé pulsation de croisement, est défini implicitement de la manière suivante :

$$|L(j\omega_c)| = 1 \quad (2.19)$$

Φ_m représente le déphasage maximal qui peut être introduit dans la boucle de telle sorte que le système demeure encore stable. La marge de gain, quant à elle, exprime la distance entre le point critique et la courbe $L(j\omega)$ le long de l'axe réel négatif. Elle est définie comme suit :

$$M_g = \frac{1}{L(j\omega_u)} \quad (2.20)$$

où la pulsation critique ω_u est celle où la réponse harmonique de la boucle coupe l'axe réel négatif :

$$\angle L(j\omega_u) = -\pi \quad (2.21)$$

M_g indique le gain maximal qui peut être inséré dans la boucle sans annihiler la stabilité du système résultant.

Les marges de gain et de phase figurent sur le diagramme de Nyquist de la figure 2.3. On y constate aisément que ces deux marges de stabilité sont moins représentatives que la norme infinie de la fonction de sensibilité, du fait qu'elles ne sont que des projections de la robustesse en stabilité dans certaines directions. Si l'une d'elles est faible, le système considéré est proche de l'instabilité. Cela peut cependant aussi être le cas pour des systèmes complexes, lorsque les deux marges sont relativement grandes. En d'autres termes, les marges de gain et de phase ne garantissent pas stricto sensu une borne supérieure pour M_s . Ces deux marges sont néanmoins très appréciées, car leur ajustement est souvent plus aisé que celui de M_s .

Enfin, la figure 2.3 permet de voir facilement qu'une spécification sur la norme infinie de sensibilité garantit une borne inférieure autant pour la marge de phase que pour celle de gain [7] :

$$\begin{aligned} M_g &\geq \frac{M_s}{M_s - 1} \\ \Phi_m &\geq 2 \arcsin \frac{1}{2M_s} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ces relations sont illustrées en figure 2.4.

2.3.3 Performance en poursuite

Les performances de la commande sont généralement spécifiées dans le domaine temporel. Le plus souvent, la réponse du système à un saut indiciel de la grandeur de référence est considérée pour juger de la qualité dynamique de la boucle fermée. Différentes valeurs caractéristiques tels que le dépassement, le temps de montée, le temps d'établissement ou encore l'erreur permanente sont attachées à cette réponse. Certains de ces paramètres temporels sont fortement corrélés à des caractéristiques fréquentielles : de ce fait, une synthèse dans le domaine fréquentiel permet de tenir compte indirectement de la performance temporelle du système résultant.

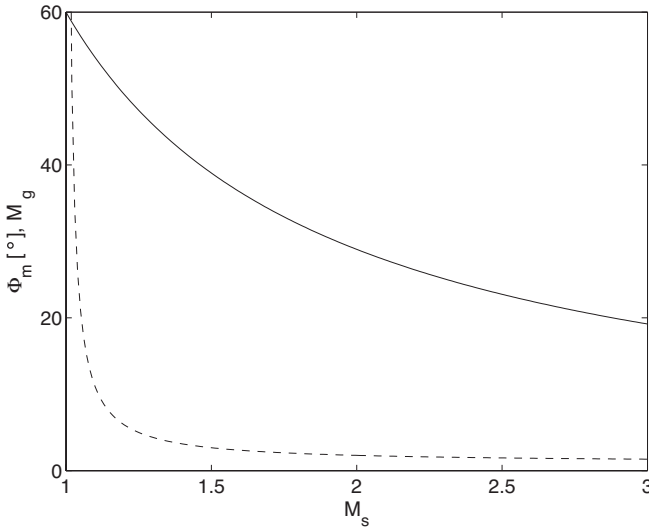


FIG. 2.4 – Borne inférieure pour Φ_m et M_g (en traitillé) en fonction de M_s .

La dynamique entre la consigne et la grandeur à commander est entièrement régie par la fonction de sensibilité complémentaire T . La norme infinie de cette dernière est une grandeur-clef, pour décrire le dépassement lors d'une réponse indicielle :

$$M_t = \|T\|_\infty \quad (2.23)$$

Pour les systèmes de deuxième ordre existe une relation exacte, liant M_t (en dB) au dépassement o (exprimé en %) [61, 73] :

$$o = 100 \cdot \exp \left(-\pi \left[\frac{1 - \sqrt{1 - 10^{-0.1M_t}}}{1 + \sqrt{1 - 10^{-0.1M_t}}} \right]^{1/2} \right) \quad (2.24)$$

Cette relation donne très souvent des résultats satisfaisants en pratique, car les caractéristiques fréquentielles en boucle fermée de beaucoup de systèmes industriels sont proches, dans une large plage autour de la fréquence de résonance, de celles des systèmes de deuxième ordre.

M_t , tout comme M_s , peut être interprété dans le plan complexe de manière très élégante. En considérant le module de chaque terme de l'équation

(2.14), la relation suivante est obtenue :

$$|T(j\omega)| = \frac{|L(j\omega)|}{|1 + L(j\omega)|} \quad (2.25)$$

Soit x et y , respectivement la partie réelle et imaginaire de la réponse harmonique de la boucle :

$$\begin{aligned} x &= \Re\{L(j\omega)\} \\ y &= \Im\{L(j\omega)\} \end{aligned}$$

En combinant les équations précitées, $|T|$ peut s'exprimer de la manière suivante :

$$|T| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(1+x)^2 + y^2}}$$

En admettant que $|T|$ est constant, l'équation peut s'écrire :

$$\left(x + \frac{|T|^2}{|T|^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{|T|^2}{(|T|^2 - 1)^2} \quad (2.26)$$

Cette équation est celle d'un cercle dans le plan complexe dont le centre c_T et le rayon r_T sont :

$$c_T = \frac{-|T|^2}{|T|^2 - 1} \quad (2.27)$$

$$r_T = \frac{|T|}{|T|^2 - 1} \quad (2.28)$$

Ainsi, dans le plan complexe, hormis pour $|T| = 1$, le lieu correspondant à une valeur constante de $|T|$ représente un cercle. Si $|T| = 1$, celui-ci dégénère en une droite verticale passant par le point de coordonnée $-0.5 + j0$. La figure 2.5 représente, pour différentes valeurs de $|T|$ entre 1 et 2, ces lieux dans le plan complexe. D'après l'équation (2.25), on constate aisément, le long de chaque courbe, que le rapport des distances d'un point considéré au point critique et à l'origine est constant.

Par conséquent, la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire M_t peut être illustrée par un cercle dans le plan complexe tangent à la réponse harmonique de la boucle, mais ne possédant aucune intersection avec celle-ci. Spécifier une valeur pour M_t correspond ainsi à définir

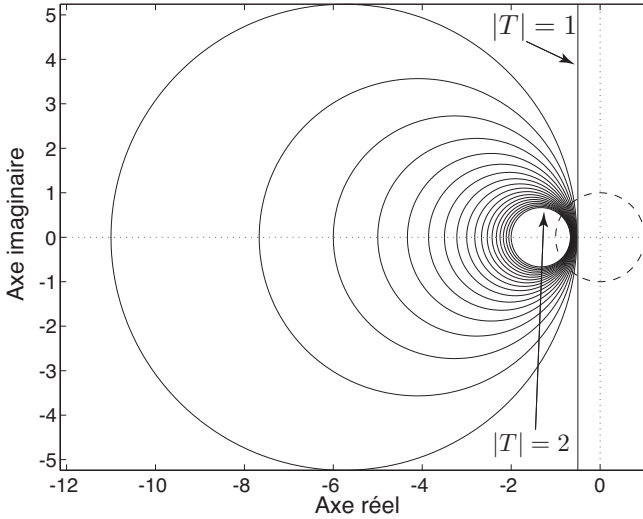


FIG. 2.5 – Lieux des valeurs constantes de $|T|$ dans le plan complexe.

un disque duquel $L(j\omega)$ est exclu. La figure 2.3 montre ce disque pour le système considéré.

La marge de phase Φ_m constitue également une mesure de performance. Ajuster la marge de phase correspond à spécifier $|T|$ à la pulsation de croisement. Or, pour beaucoup de systèmes, ω_c est juste légèrement supérieur à la fréquence correspondant au maximum de sensibilité complémentaire. Ainsi, lorsqu'on choisit une marge de phase, un but recherché peut être de calibrer la réponse harmonique de la boucle dans cette région et ainsi d'obtenir approximativement une valeur désirée pour M_t . Une règle grossière peut être donnée pour signaler une tendance pour le dépassement (en %) obtenu, en fonction de la marge de phase (exprimée en degrés) :

$$o = 70 - \Phi_m \quad (2.29)$$

Il existe également une relation d'inégalité entre M_t et Φ_m . Comme la figure 2.3 le montre, une valeur donnée de M_t assure une borne inférieure pour Φ_m selon :

$$\Phi_m \geq -\arccos\left(\frac{1 - 2M_t^2}{2M_t^2}\right) + \pi \approx \frac{63}{M_t} - 3 \quad (2.30)$$

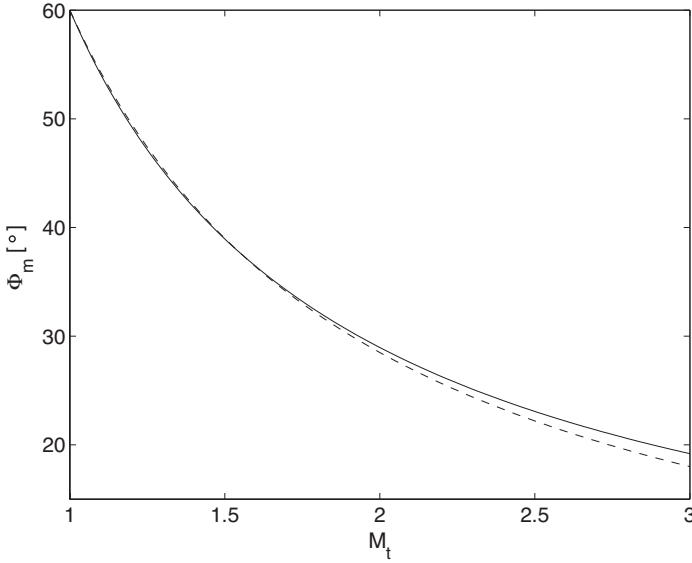


FIG. 2.6 – Borne inférieure pour Φ_m en fonction de M_t (traitillé : relation approximative).

Ces relations sont illustrées en figure 2.6.

Le temps de montée t_m du système en boucle fermée est l'indicateur principal de rapidité. Cette grandeur est indéniablement liée à la pulsation de croisement ω_c . L'approximation :

$$\omega_c = \frac{2.3}{t_m} \quad (2.31)$$

donne souvent des résultats satisfaisants en pratique pour les systèmes à minimum de phase. Cette recette est obtenue en considérant que la dynamique de système bouclé est du second ordre.

ω_c est également lié à la bande passante du système en boucle fermée, définie comme étant la pulsation où $|T(j\omega)|$ franchit les -3 dB. La valeur de cette dernière constitue parfois une spécification pour l'ajustement du régulateur qu'il est possible de prendre en compte en considérant la pulsation de croisement.

2.3.4 Rejet de perturbations

Les commandes automatiques sont très souvent sujettes à des perturbations qu'il convient de rejeter. Comme mentionné en équation (2.8), l'influence de la perturbation sur la grandeur à commander est décrite par la relation suivante :

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G(s)}{1 + L(s)} \quad (2.32)$$

En considérant la situation boucle ouverte, où $G(s)$ n'est pas commandé par contre-réaction, une perturbation en entrée occasionne une modification de la sortie $y_{bo}(t)$, dont la dynamique est gérée par la fonction de transfert $G(s)$:

$$\frac{Y_{bo}(s)}{D(s)} = G(s) \quad (2.33)$$

où Y_{bo} décrit la transformée de Laplace du signal de sortie y_{bo} . Par conséquent, l'influence de la rétroaction sur une perturbation est donnée en combinant les équations (2.32) et (2.33) :

$$\frac{Y(s)}{Y_{bo}(s)} = \frac{1}{1 + L(s)} = S(s) \quad (2.34)$$

Ainsi la fonction de sensibilité joue un rôle prépondérant non seulement pour juger de la stabilité du système, mais également pour quantifier l'amplification des perturbations par la boucle fermée. Une perturbation de type sinusoïdal se verra atténuée par la rétroaction si sa pulsation ω est telle que $|S(j\omega)| < 1$. Au contraire, elle se verra amplifiée si $|S(j\omega)| > 1$. M_s quantifie l'amplification maximale que peut subir une perturbation. Il est donc important de limiter sa valeur.

Cependant, de manière générale, le problème du rejet de perturbations n'est pas résolu en bornant son amplification par la boucle. Pour un bon rejet, il faut que le module de la fonction de sensibilité soit petit aux fréquences contenues dans le signal perturbateur $d(t)$. Or, pour la majorité des systèmes industriels, le contenu fréquentiel du signal d est largement prépondérant en basse fréquence. d est d'ailleurs très souvent modélisé par un saut indiciel. La pulsation déterminante pour M_s se situe bien souvent en aval de celles où le spectre de d est riche. Contrairement aux méthodes de type H_∞ , débouchant sur des compensateurs d'ordre élevé, et qui permettent une calibration de la fonction de sensibilité en toutes fréquences,

les méthodes ayant trait aux régulateurs d'ordre restreint ne le permettent pas. L'abaissement de $|S(j\omega)|$ en basse fréquence ne peut être provoqué que de manière indirecte. Pour ce faire, un résultat fondamental de la théorie dans le domaine fréquentiel est utilisé :

$$\int_0^\infty \log |S(j\omega)| d\omega = 0 \quad (2.35)$$

Cette relation, valable pour les systèmes stables où le degré relatif de $L(s)$ est d'au moins deux, exprime le fait que l'aire, sous $|S|$ exprimé de manière logarithmique, est constante. Elle montre que si la sensibilité est réduite en une pulsation, elle doit forcément être augmentée en d'autres fréquences. L'équation (2.35) n'implique cependant pas que l'abaissement de la sensibilité en basse fréquence provoque l'augmentation de la norme infinie de la fonction de sensibilité. Cependant, lorsqu'une contrainte sur la bande passante de la fonction de transfert de la boucle est présente, il a été démontré en [21] que l'abaissement de la sensibilité en basse fréquence résulte en une augmentation de $|S|$ aux fréquences antérieures à celle déterminant la bande passante. Dans ce cas, un meilleur comportement en rejet de perturbations peut souvent être obtenu en augmentant la valeur de M_s . Ainsi, un compromis existe souvent entre rejet de perturbations, robustesse et performance en poursuite. Des spécifications différentes peuvent alors être formulées suivant que la priorité est donnée à l'asservissement ou à la régulation. Dans les applications et les exemples de simulation présentés sont surtout considérés les problèmes d'asservissement, bien que les méthodes proposées permettent aussi de spécifier des valeurs de synthèse privilégiant le comportement en régulation.

Une autre grandeur indirectement liée au rejet de perturbations est le gain d'intégration $K_i = K_p/T_i$. D'aucuns recommandent de le maximiser afin de minimiser l'intégrale de l'écart dû à la perturbation [45, 60, 68]. Cependant, une optimisation de K_i , accompagnée de contraintes de robustesse, donne souvent, comme cela est justifié de manière détaillée en [9], des régulateurs ayant des propriétés indésirables.

2.3.5 Sensibilité au bruit de mesure

Le signal $n(t)$ représentant le bruit de mesure constitue la dernière entrée du système illustré en figure 2.1. L'introduction du bruit de mesure dans le système est une conséquence inévitable de l'utilisation de la rétroaction. De plus, tout organe de mesure produit un signal altéré par du bruit. Ainsi, il convient d'en tenir compte lors de la synthèse d'un régulateur.

Une première constatation qui peut être faite en étudiant les relations exposées en équation (2.8) est que les fonctions de transfert décrivant la propagation du bruit sont exactement les mêmes que celles représentant la dynamique d'un changement de consigne. Ainsi, le système ne peut pas différencier le signal de consigne du bruit de mesure. Par chance, ce dernier n'a typiquement qu'un contenu haute fréquence, se trouvant au-delà de la bande passante en boucle fermée, et se voit ainsi atténué par la boucle.

Il faut cependant veiller à ce que le bruit de mesure ne génère pas un comportement indésirable de la grandeur de commande. L'effet du bruit de mesure sur cette dernière peut être étudié en considérant la fonction de transfert suivante (voir équation (2.8)) :

$$\frac{K(s)}{1 + L(s)} \quad (2.36)$$

En haute fréquence, cette fonction de transfert a un comportement très proche de $K(s)$. Or, pour un régulateur PID idéal, $K(j\omega)$ tend en haute fréquence vers l'infini. Cette affirmation motive clairement l'emploi de filtres pour limiter l'amplification du bruit. Plusieurs types de filtres peuvent être envisagés en pratique. Très couramment, le signal résultant du terme dérivé est filtré par un élément passe-bas du premier ordre. Il en résulte la structure du régulateur présentée en équation (2.6).

Notons finalement qu'un régulateur implanté de manière digitale n'amplifiera les bruits de mesure que dans une bande de fréquences limitée. Dans ce cas, si une composante non-négligeable du bruit est présente au-delà de la pulsation de Nyquist, un filtre de garde analogique est fortement souhaité afin d'éviter tout repliement de son spectre.

2.3.6 Choix des paramètres de synthèse

Maintenant que les propriétés importantes d'un système en boucle fermée ont été évoquées et que les relations avec les différentes caractéristiques fréquentielles ont été exposées, il reste à motiver le choix des paramètres, qui seront utilisés pour l'ajustement, dans les chapitres suivants.

Pour la synthèse des régulateurs d'ordre restreint, il est fortement souhaité que les procédures d'ajustement soient simples. Cette simplicité a des implications directes sur les paramètres de synthèse. Idéalement, ces derniers doivent remplir plusieurs exigences :

1. Leur nombre doit être restreint.
2. Les paramètres utilisés doivent capter l'essence du problème. En d'autres termes, ils doivent représenter la stabilité ainsi que les performances du système en boucle fermée. De plus, l'influence des paramètres de synthèse sur les propriétés du système doit être transparente pour l'utilisateur.
3. Les paramètres de synthèse doivent avoir un caractère universel : idéalement leurs valeurs ne doivent pas dépendre de la dynamique du système considéré. De plus, par défaut, de bonnes valeurs doivent être disponibles de telle sorte que l'ajustement puisse être rapidement applicable à différents systèmes, sans nécessiter l'intervention d'un utilisateur expérimenté. Différentes boucles de rétroaction ajustées selon les mêmes spécifications doivent notamment avoir une dynamique semblable.

Basés sur ces considérations, les paramètres de synthèse utilisés par les méthodes d'ajustement présentées dans cet ouvrage sont les suivants :

- **Norme infinie de la fonction de sensibilité M_s .** Communément, des valeurs entre $1.3 < M_s < 2$ sont souhaitées. Une valeur comprise dans le bas de la fourchette garantit une meilleure robustesse alors qu'un choix plus proche de 2 améliore le rejet de perturbations au détriment des marges de stabilité.
- **Norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire M_t .** Pour limiter de larges dépassements lors de réponses indicielles, il est conseillé de spécifier une valeur inférieure à $M_t = 1.2$.
- **Marge de phase Φ_m .** Des valeurs typiques pour le choix de Φ_m sont entre 30° et 60° .

- **Marge de gain M_g .** Généralement, des valeurs supérieures à $M_g = 2$ sont souhaitées en pratique. Un problème associé à la marge de gain est qu'une spécification a priori n'est pas toujours possible. Pour un système d'ordre élevé ou comportant un retard pur non négligeable, une valeur proche de 2 est réaliste en pratique. Au contraire, si un système d'ordre un ou deux sans retard pur est pris en compte, une telle valeur n'est pas réalisable. Une marge bien supérieure est de toute façon obtenue.
- **Pulsation de croisement ω_c .** Ce paramètre ne remplit pas le troisième point des exigences idéales. Une valeur de spécification ω_c dépend tout particulièrement de la dynamique du système à commander et ne peut pas être donnée de manière a priori. Si la bande passante du système en boucle fermée ou le temps de montée sont connus, une valeur estimative pour ω_c peut l'être également. Si aucune performance temporelle n'est spécifiée, il a été proposé en [40], de choisir ω_c , en exprimant le rapport de ω_c par la pulsation critique du système à commander ω_u :

$$z = \frac{\omega_c}{\omega_u} \quad (2.37)$$

Ce rapport z ne peut pas non plus, en général, être donné de manière a priori, mais dépend également de la dynamique du système. Si le temps de montée souhaité est proche de celui obtenu par le régulateur résultant de la méthode de Ziegler et Nichols [81], la résolution d'une équation algébrique permet souvent d'obtenir une valeur convenable pour ω_c . Notons que la méthode d'ajustement proposée en chapitre 4 permet de ne pas considérer ω_c comme paramètre de synthèse si l'utilisateur ne connaît pas une spécification judicieuse pour le problème considéré.

Enfin, comme les spécifications précitées sont parfois redondantes, il n'est pas souhaitable de les considérer toutes lors d'un ajustement. Les méthodes proposées ultérieurement permettent à l'utilisateur de choisir celles qui lui paraissent les plus pertinentes.

2.4 Méthodes du relais

Toute méthode d'ajustement, aussi simple soit-elle, exige une certaine connaissance du système à commander. Celle-ci peut provenir, soit d'un modèle de connaissance obtenu par une modélisation mathématique de la physique du système, soit alors de différentes mesures opérées sur ce dernier. Pour l'ajustement du régulateur PID, les méthodes de mesure n'offrant qu'une connaissance succincte du processus sont souvent privilégiées. Ces mesures peuvent déboucher sur un modèle primaire ou alors être utilisées pour une synthèse directe du régulateur. Dans ce contexte, les méthodes dites «du relais» sont particulièrement profitables. Elles se basent sur l'analyse de cycles limites obtenus à partir de schémas non linéaires. Par de simples procédures de mesure, elles permettent d'identifier, dans le diagramme de Nyquist, des points particuliers de la réponse harmonique du système à commander ou de la boucle. D'autres avantages, telles que leur facilité d'implantation ou leur structure en boucle fermée, permettant de réduire la sensibilité aux perturbations, les ont rendues spécialement appréciées par la communauté industrielle. Cette section rappelle les outils utilisés pour l'analyse de telles réalisations et remémore la méthode standard du relais ainsi que les modifications proposées pour accroître substantiellement la précision de mesure.

2.4.1 Méthode du premier harmonique

La présence d'un élément non linéaire dans un montage en rétroaction rend l'analyse exacte de la dynamique du système très complexe [78]. La méthode du premier harmonique constitue une approximation qui offre une alternative intéressante. Elle permet de prédire et d'analyser approximativement les régimes permanents oscillatoires résultant d'expériences non linéaires. Cette étude peut être réalisée de manière simple dans le domaine fréquentiel.

L'applicabilité de l'analyse par la méthode du premier harmonique est constituée de tout système pouvant être ramené sous la forme représentée en figure 2.7 où f décrit une fonction non linéaire statique et $G(s)$, une fonction de transfert passe-bas linéaire. Quelques hypothèses sont formulées afin de permettre l'étude de cycles limites :

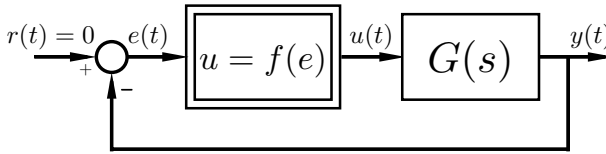


FIG. 2.7 – Un système non linéaire.

1. La non-linéarité est unique.
2. L'élément non linéaire est invariant dans le temps.
3. f est une fonction impaire.
4. La sortie de la non-linéarité est périodique de même période que l'entrée.

La troisième hypothèse, stipulant que f est symétrique par rapport à l'origine, n'est pas nécessaire, mais simplifie la notation par la suite. Elle permet de négliger le terme constant du développement de Fourier du signal en sa sortie.

Considérons maintenant la transmission d'un signal sinusoïdal dans l'organe non linéaire : soit $e(t) = A \sin(\omega t)$ le signal en entrée de la fonction f . La sortie $u(t)$ correspond à un signal périodique, pas nécessairement sinusoïdal, qui admet généralement une infinité d'harmoniques. En utilisant un développement en série de Fourier, $u(t)$ peut être exprimé de la manière suivante :

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) \quad (2.38)$$

où les coefficients de Fourier a_n et b_n sont déterminés comme suit :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \cos(n\omega t) d(\omega t) \quad (2.39)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(t) \sin(n\omega t) d(\omega t) \quad (2.40)$$

On conçoit aisément que le problème est a priori très complexe si on considère la structure en rétroaction de la figure 2.7. Chaque harmonique est filtré par le système linéaire et se retrouve par la suite à nouveau en entrée de la non-linéarité. Heureusement, les systèmes linéaires sont, de manière

très générale, strictement causaux et vont atténuer les harmoniques de rang supérieur. Comme son nom l'indique, la méthode du premier harmonique propose de ne considérer que l'harmonique fondamental et suppose que les harmoniques supérieurs sont complètement filtrés par le système linéaire, à savoir :

$$\begin{aligned} u(t) &\approx a_1 \cos(\omega t) + b_1 \sin(\omega t) \\ &= M \sin(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad (2.41)$$

où :

$$M(A, \omega) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \quad (2.42)$$

$$\phi(A, \omega) = \arctan\left(\frac{a_1}{b_1}\right) \quad (2.43)$$

Par analogie aux systèmes linéaires, où la réponse harmonique est le rapport entre l'entrée sinusoïdale et la sortie du système, le gain équivalent N d'un élément non linéaire est le rapport complexe de la composante fondamentale à la sortie de l'élément non linéaire, par l'entrée sinusoïdale :

$$N(A, \omega) = \frac{M e^{j(\omega t + \phi)}}{A e^{j\omega t}} = \frac{M}{A} e^{j\phi} \quad (2.44)$$

Ainsi, l'élément non linéaire est remplacé, pour l'analyse de la dynamique du système en figure 2.7, par son gain équivalent. Cette simplification est appelée quasi-linéarisation. Il est important de noter ici que le gain équivalent n'est défini que pour une entrée sinusoïdale et n'a de sens que si le système est dans un régime périodique oscillatoire.

Calcul du gain équivalent

Seuls les deux types de non-linéarité très courants que sont le relais et la saturation seront exploités par les méthodes de mesure présentées dans ce mémoire. Pour ces deux éléments, le calcul du gain équivalent est brièvement rappelé ici. Pour ce faire, considérons la relation entrée-sortie d'une saturation telle que l'illustre la figure 2.8. a et k y décrivent respectivement le domaine de linéarité et la pente de la saturation : soit $e(t) = A \sin(\omega t)$ le signal d'entrée de cette non-linéarité. Si $A \leq a$ la sortie n'est pas saturée et reste dans le domaine linéaire :

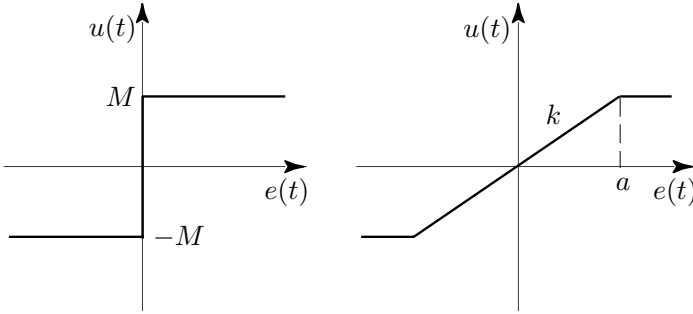


FIG. 2.8 – Caractéristiques entrée-sortie d'un relais et d'une saturation.

$$u(t) = kA \sin(\omega t) \quad (2.45)$$

De ce fait, le gain équivalent est la constante k . Dans le cas où $A > a$, la sortie de la saturation peut être exprimée comme suit :

$$u(t) = \begin{cases} kA \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \omega t_1 \\ ka & \omega t_1 \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases} \quad (2.46)$$

où $\omega t_1 = \arcsin(a/A)$. Comme la caractéristique de la saturation est impaire, $a_1 = 0$. La symétrie de la saturation permet, pour le calcul de b_1 , de ne considérer qu'un quart de période :

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} u(t) \sin(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\omega t_1} kA \sin^2(\omega t) d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\omega t_1}^{\pi/2} ka \sin(\omega t) d(\omega t) \\ &= \frac{2kA}{\pi} \left(\omega t_1 + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent, le gain équivalent d'une saturation est :

$$N_s(A) = \frac{2k}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} \right] \quad (2.47)$$

Le relais, dont la caractéristique entrée-sortie est montrée en figure 2.8, constitue un cas particulier d'une saturation où le domaine de linéarité est

nul et la pente infinie. Son gain équivalent découle d'un simple calcul et vaut :

$$N_r(A) = \frac{4M}{\pi A} \quad (2.48)$$

Notons que les gains équivalents des deux éléments considérés sont purement réels, ne causant ainsi pas de déphasage du signal de sortie. Ils sont également indépendants de la fréquence du signal d'entrée dont seul l'amplitude est déterminante. Ainsi, ils peuvent être vus comme de simples gains dont la valeur dépend de l'amplitude A . Par la suite, l'analyse se limite aux gains équivalents dont les fonctions ne dépendent pas de la pulsation du signal en entrée.

Existence de cycles limites

Le gain équivalent revêt une grande importance pour prédire l'apparition de cycles limites. Considérons le système représenté en figure 2.7. Pour l'analyse, la non-linéarité f est remplacée par son gain équivalent $N(A)$. Supposons que le système est le siège d'oscillations permanentes. Ainsi, les variables internes doivent satisfaire les relations suivantes [69] :

$$e = -y \quad (2.49)$$

$$u = N(A)e \quad (2.50)$$

$$y = G(j\omega)u \quad (2.51)$$

Ainsi :

$$y = G(j\omega)N(A)(-y) \quad (2.52)$$

Comme $y \neq 0$ on a :

$$G(j\omega)N(A) + 1 = 0 \quad (2.53)$$

ou encore :

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)} \quad (2.54)$$

Si l'équation susmentionnée n'a pas de solutions, le système non linéaire ne peut générer de cycles limites. L'équation caractéristique de l'équation (2.53) est très semblable à celle des systèmes linéaires. Cependant, le point critique est ici remplacé par un lieu critique $-1/N(A)$. La résolution analytique de l'équation (2.54) est généralement difficile. Toutefois, une approche

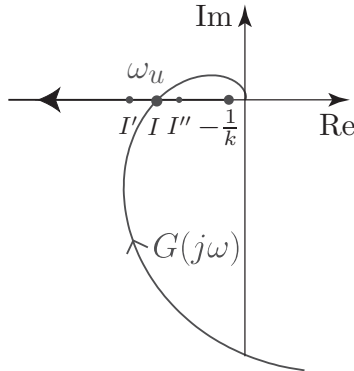


FIG. 2.9 – Illustration de l'équation caractéristique montrant l'existence d'un cycle limite.

graphique permet une utilisation simple de cette condition. L'idée est de représenter sur le plan complexe les deux termes de l'équation. Chaque intersection entre les deux courbes correspond à l'existence d'une oscillation limite.

Dans le cas d'une saturation, le lieu critique $-1/N_s(A)$ est une ligne portée par l'axe réel négatif. Le point de départ de cette ligne est le point $-1/k$. L'existence d'un cycle limite, signalée par l'intersection du lieu critique et de la réponse harmonique du système $G(s)$, est illustrée en figure 2.9. Le sens correspondant aux amplitudes croissantes en entrée de la saturation est signalée sur le lieu critique par une flèche. Dans le cas particulier d'un relais, où la pente k tend vers l'infini, le lieu critique est constitué par l'axe réel négatif dans son entier.

Stabilité des cycles limites

L'existence d'un régime oscillatoire permanent n'implique toutefois pas sa stabilité. Cette dernière est une condition sine qua non à son apparition. Une démonstration de stabilité, basée sur une extension du critère de Nyquist, peut être formulée. Considérons pour ce faire la figure 2.9. Supposons qu'un cycle limite d'amplitude A , correspondant au point d'intersection I , soit généré par le système considéré. $G(s)$ est supposé stable afin de simplifier l'analyse. Si une petite perturbation accroît légèrement

l'amplitude de l'oscillation, le point d'opération du cycle limite est alors déplacé de I vers I' . La réponse harmonique de $G(s)$ laisse ce point sur sa gauche, impliquant que le système est stable en ce point. Ainsi, l'amplitude de l'oscillation va progressivement diminuer pour retrouver l'intensité initiale. Dans le cas contraire, où l'amplitude de l'oscillation diminue pour une raison quelconque et entraîne le point d'opération en I'' , il s'ensuivra une augmentation de l'amplitude, car le système est instable par rapport à ce dernier. Basé sur cette argumentation intuitive, le critère de stabilité peut s'exprimer de la manière suivante :

Critère de stabilité : chaque intersection entre $G(j\omega)$ et le lieu critique de la non-linéarité statique correspond à un cycle limite. Si la réponse harmonique $G(j\omega)$ n'encercle pas, le long du lieu critique, les points proches de l'intersection et correspondant aux amplitudes croissantes, le cycle limite est stable. Dans le cas contraire, il est instable.

2.4.2 Méthode standard du relais

Le test standard du relais a été originellement proposé pour identifier le point critique d'un système à commander [5]. La motivation était, en automatisant la procédure de mesure, d'accroître la sûreté et de réduire le temps d'expérimentation nécessaire, par rapport à la procédure proposée par Ziegler et Nichols [81]. Pour cette dernière, le régulateur consiste en un simple gain proportionnel qui doit être augmenté progressivement jusqu'à la limite de stabilité, se manifestant par un régime oscillatoire permanent.

La méthode standard du relais propose de remplacer simplement le régulateur par un élément tout-ou-rien. Ce montage en rétroaction est illustré en figure 2.10. Il résulte de l'analyse faite plus haut que ce schéma donnera naissance à un régime permanent oscillatoire si la réponse harmonique $G(j\omega)$ coupe l'axe réel négatif. La fréquence du cycle limite ainsi obtenu correspond à la pulsation critique ω_u . Le module du point critique résulte, quant à lui, directement de l'amplitude du cycle limite, grâce à l'équation caractéristique (2.54) :

$$|G(j\omega_u)| = \frac{\pi A}{4M} \quad (2.55)$$

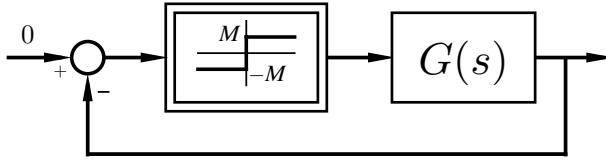


FIG. 2.10 – Méthode standard du relais.

2.4.3 Amélioration de la précision des mesures

La précision des mesures réalisées par la méthode standard du relais est tributaire du système à commander. La méthode du premier harmonique se fonde sur une atténuation complète des harmoniques de rang supérieur qui n'est en aucun cas vérifiée en pratique. De cette atténuation dépendra la précision obtenue. Pour des systèmes d'ordre relatif élevé, au comportement fortement passe-bas, les valeurs obtenues sont généralement bonnes alors que l'erreur relative peut avoisiner les 30% pour la pulsation critique estimée avec des systèmes d'ordre relatif faible [53]. Afin d'accroître substantiellement l'exactitude de l'identification, une procédure adaptative, proposée en [66, 67], peut être exploitée.

Dans cette méthode, l'élément tout-ou-rien est remplacé par une saturation et un gain positif variable au cours de temps k . Ce gain représente la pente de la saturation. Lorsque celui-ci tend vers l'infini, la saturation devient un relais et la dynamique du système se confond avec celle du test standard du relais. Lorsque k diminue progressivement, le point $-1/k$ du lieu critique se déplace le long de l'axe réel négatif, en direction du point critique du système à commander. En même temps, la sortie de la saturation devient de moins en moins saturée et approche de plus en plus d'un signal sinusoïdal. La distance le long de l'axe réel, séparant le point critique du point $-1/k$, est directement proportionnelle au taux de saturation du signal à la sortie de l'organe non linéaire et aussi à la dégradation de la qualité de mesure, due à la présence d'harmoniques de rang supérieur. Si k devient plus petit que le gain critique du système à commander, il n'existe plus d'intersection entre la réponse harmonique du processus et le lieu critique, et l'oscillation s'éteindra en un temps fini.

L'idée principale de la procédure de mesure présentée en [66] est d'ajuster le gain k de sorte que l'oscillation se maintienne à un taux de saturation

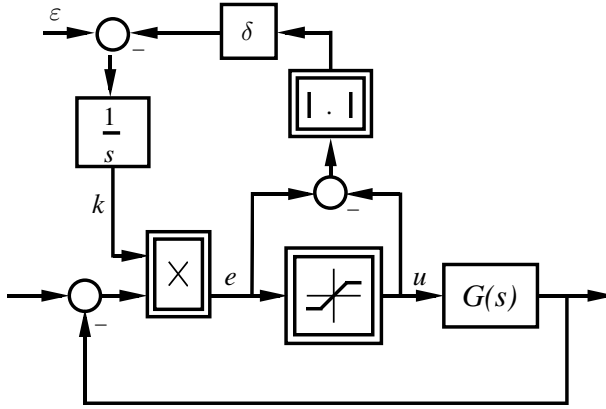


FIG. 2.11 – Amélioration de la précision des mesures.

infime. Cette expérience peut être réalisée à l'aide du schéma présenté en figure 2.11, où l'indication $|\cdot|$ représente la valeur absolue. Cette opération, réalisée sur la différence entre le signal d'écart e et la grandeur de commande u , indique si ce dernier est saturé ou non. La règle suivante est présentée pour l'ajustement du gain k : si $|e(t) - u(t)|$ est non nul, cela indique une saturation au niveau du signal, et plaide pour une diminution du gain k . Dans le cas contraire, k est accru. Cette règle débouche sur l'algorithme d'adaptation suivant :

$$\frac{dk}{dt} = -\delta|e(t) - u(t)| + \varepsilon \quad (2.56)$$

où δ et ε sont des nombres positifs. Une analyse de convergence de l'algorithme est suggérée en [66]. Pour des ε suffisamment petits ($\varepsilon \ll \delta$), $k(t)$ converge vers un état stationnaire dans le voisinage du gain critique de $G(s)$. La fréquence du cycle limite obtenu correspond par ailleurs à la pulsation critique ω_u . Des exemples de valeurs sont proposés en [66] pour δ et ε . En outre, les simulations et les expériences temps réel exposées en [66] montrent une convergence rapide de l'algorithme et des valeurs de mesure précises.

Chapitre 3

Ajustement non itératif sans modèle

3.1 Introduction

Ce chapitre expose une méthodologie dérivée de celle de Ziegler-Nichols, et privilégiant la facilité extrême de l'ajustement. L'approche proposée s'inscrit dans le contexte industriel où une boucle de rétroaction doit souvent être dimensionnée rapidement et parfois même de manière automatisée. Dans ces circonstances, le recours à une identification in extenso du système à commander, ou à de longues procédures de mesure est exclu. De même, le calcul à proprement parler du régulateur doit être aisé et sa formulation, si possible analytique.

La méthode modifiée de Ziegler-Nichols [7] possède l'avantage de cette simplicité et elle est connue pour fournir, dans beaucoup de situations, des solutions adéquates au problème d'automatique. L'approche est très intuitive et l'effort consenti pour son implantation est relativement modeste. Seule la connaissance d'un point de la réponse harmonique du système à commander, correspondant à la pulsation de croisement désirée, est requise. Celui-ci peut alors être placé par le régulateur à l'emplacement souhaité sur le cercle unité, de façon à satisfaire la marge de phase voulue. L'évaluation des paramètres du régulateur passe par la résolution de deux équations, liées à l'affectation du module et de l'argument du point considéré dans le plan complexe. Une équation additionnelle doit cependant être introduite de fa-

çon à obtenir, pour les paramètres du régulateur PID, une solution unique. Celle-ci consiste à considérer comme fixe le rapport entre la constante d'intégration et de dérivation ($T_i = \gamma T_d$). Le choix de γ peut influencer de manière drastique la robustesse et les performances du système bouclé [7, 71]. Bien que plusieurs auteurs [7, 49] aient proposé, dans la littérature, des nombres «magiques» pour ce paramètre, un des problèmes associés à cette démarche est le fait qu'il doit être choisi de manière a priori, sans aucune information sur la dynamique du système considéré.

La méthode modifiée de Ziegler-Nichols se résume ainsi à positionner un point de la réponse harmonique de la boucle. La procédure présentée dans ce chapitre propose, en plus, de calibrer quelque peu $L(j\omega)$, autour de la pulsation de croisement, en utilisant des contraintes sur les normes infinies des fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire. Pour ce faire, le rapport γ est déterminé lors de la synthèse de façon à ajuster la pente de la réponse harmonique de la boucle à la pulsation de croisement. Comme la formulation du régulateur est analytique, et que sa synthèse ne requiert que la connaissance du gain statique, en plus des informations exigées par la méthode modifiée de Ziegler-Nichols, elle garde l'avantage d'une mise en œuvre extrêmement facilitée.

Au début du chapitre, en section 3.2, l'imposition d'une marge de phase désirée, telle que proposée par la méthode modifiée de Ziegler-Nichols, est rappelée. La calibration de la réponse harmonique, obtenue en ajustant sa pente à la pulsation de croisement, est ensuite présentée en section 3.3. Pour cette réalisation, la connaissance des dérivées de l'amplitude et des dérivées de la phase du système à commander par rapport à la pulsation, est nécessaire. Ces dérivées peuvent être estimées sans aucun modèle grâce aux intégrales de Bode, qui sont traitées en section 3.4. La section 3.5 est consacrée au choix de la pente à donner à la réponse harmonique de la boucle afin de satisfaire aux contraintes de sensibilité. Enfin, les sections 3.6 et 3.7 démontrent l'efficacité de la méthode proposée à l'aide, respectivement, d'exemples de simulation et d'une application temps réel.

Il convient de mentionner ici qu'une grande partie du présent chapitre a fait l'objet de différentes publications scientifiques [33, 43, 44] parues durant ces dernières années, co-écrites par l'auteur du présent ouvrage.

3.2 Imposition de la marge de phase

Soit un processus dont la réponse harmonique $G(j\omega)$ est supposée connue à la pulsation de croisement spécifiée ω_c . En pratique, l'identification de $G(j\omega_c)$ peut être effectuée par un simple essai harmonique en boucle ouverte, ou encore de manière itérative, en utilisant un test du relais incluant un retard pur [33]. La formulation standard du régulateur PID, représentée en équation (2.1) est prise en compte pour l'imposition d'une marge de phase Φ_m . Le régulateur doit alors déplacer le point $G(j\omega_c)$ en $e^{j(\Phi_m - \pi)}$. Il en résulte l'équation suivante :

$$K(j\omega_c)G(j\omega_c) = e^{j(\Phi_m - \pi)} \quad (3.1)$$

En considérant que l'argument et le module de chaque terme de l'équation ci-dessus doivent satisfaire à l'égalité, les relations suivantes sont alors obtenues :

$$\angle G(j\omega_c) + \angle K(j\omega_c) = \Phi_m - \pi \quad (3.2)$$

$$|G(j\omega_c)K(j\omega_c)| = 1 \quad (3.3)$$

À partir de ces équations et de la fonction de transfert du régulateur PID (cf. équation (2.2)), de simples calculs algébriques nous livrent rapidement les paramètres recherchés [7, 52] :

$$K_p = \frac{\cos(\Phi_m - \varphi_c - \pi)}{|G(j\omega_c)|} \quad (3.4)$$

$$T_d\omega_c - \frac{1}{T_i\omega_c} = \tan(\Phi_m - \varphi_c) \quad (3.5)$$

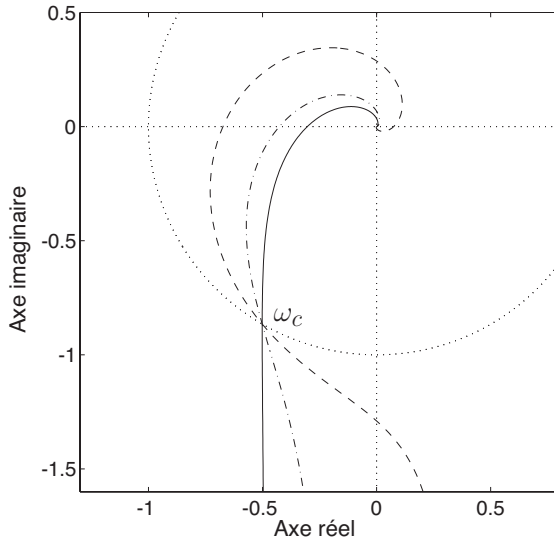
où :

$$\varphi_c = \angle G(j\omega_c) \quad (3.6)$$

Comme l'équation (3.5) possède généralement une infinité de solutions, une contrainte supplémentaire est introduite dans la méthode modifiée de Ziegler-Nichols, fixant le rapport entre la constante de dérivation et d'intégration :

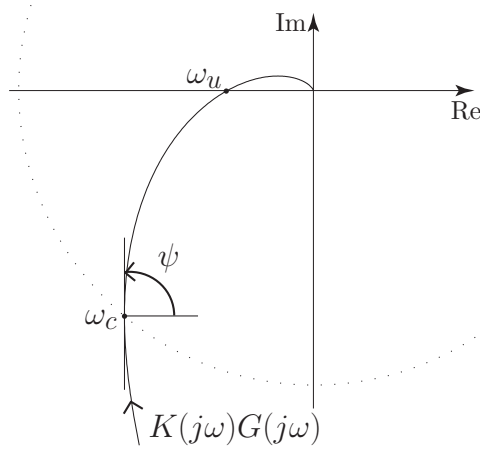
$$T_i = \gamma T_d \quad (3.7)$$

La figure 3.1 montre que le choix de la constante γ influence fortement la robustesse et ainsi les performances en boucle fermée. Cette illustration

FIG. 3.1 – Importance du choix du paramètre γ .

dépeint, pour un système à commander donné, trois diagrammes de Nyquist de la fonction de transfert de la boucle, dont les régulateurs ont été obtenus en résolvant les équations (3.4), (3.5) et (3.7) avec différentes valeurs pour γ . On y constate aisément que les trois courbes passent par un même point et satisfont ainsi aux spécifications émises sur la marge de phase et sur la pulsation de croisement. Néanmoins, la robustesse des trois systèmes diffère passablement.

De ce fait, il est important d'opter pour une valeur du paramètre γ , qui procède à une calibration appropriée de $L(j\omega)$. Dans la méthode modifiée de Ziegler-Nichols, la valeur de γ ne résulte nullement de la procédure de dimensionnement du régulateur, mais doit être assignée de manière a priori. En [7, 9] les auteurs proposent d'adopter $\gamma = 4$. Ils motivent leur choix en soulignant que ce rapport est celui souvent obtenu par la méthode Kappa-Tau. Celle-ci se fonde sur des lois empiriques provenant d'une synthèse optimale, effectuée sur un large éventail de modèles représentatifs des processus industriels, avec des contraintes de robustesse sur M_s . Il en résulte des chiffres très proches de quatre pour les systèmes dont le quotient κ est

FIG. 3.2 – Illustration de l'angle ψ .

inférieur à 0.6, où :

$$\kappa = \frac{G(j\omega_u)}{G(j0)} \quad (3.8)$$

Bien que ce rapport soit approprié dans bien des cas, il a été remarqué en [71] qu'il pouvait parfois mener à des résultats très modestes dans certaines situations. D'aucuns ont signalé que de meilleures solutions apparaissent quelquefois en utilisant la relation $T_i = 2.5T_d$ [49].

Dans ce qui suit, il est proposé de fixer le rapport entre la constante d'intégration et de dérivation, non plus de manière a priori, mais durant le dimensionnement du régulateur, de manière à calibrer la réponse harmonique de la boucle, en fixant sa pente en ω_c .

3.3 Ajustement de la pente de la réponse harmonique de la boucle

La pente ψ de la courbe de Nyquist de $L(j\omega)$ en ω_c est exprimée par l'argument de la dérivée de $L(j\omega)$ par rapport à la pulsation, évaluée en ω_c . L'interprétation de ψ est illustrée en figure 3.2. La dérivée de la fonction de transfert de la boucle par rapport à la pulsation peut être calculée comme

suit :

$$\frac{dL(j\omega)}{d\omega} = G(j\omega) \frac{dK(j\omega)}{d\omega} + K(j\omega) \frac{dG(j\omega)}{d\omega} \quad (3.9)$$

En outre, la relation suivante est vérifiée :

$$\ln G(j\omega) = \ln |G(j\omega)| + j\angle G(j\omega) \quad (3.10)$$

D'une part, en dérivant cette dernière égalité par rapport à ω , la formulation suivante est obtenue :

$$\frac{d \ln G(j\omega)}{d\omega} = \frac{1}{G(j\omega)} \frac{dG(j\omega)}{d\omega} = \frac{d \ln |G(j\omega)|}{d\omega} + j \frac{d\angle G(j\omega)}{d\omega} \quad (3.11)$$

D'autre part, la dérivée de la fonction de transfert du régulateur vaut :

$$\frac{dK(j\omega)}{d\omega} = jK_p \left(T_d + \frac{1}{\omega^2 T_i} \right) \quad (3.12)$$

En insérant le résultat des équations (2.2), (3.11) et (3.12) en (3.9), il en découle :

$$\begin{aligned} \frac{dL(j\omega)}{d\omega} = & K_p G(j\omega) \left[j \left(T_d + \frac{1}{\omega^2 T_i} \right) + \left(1 + j \left(T_d \omega - \frac{1}{\omega T_i} \right) \right) \right. \\ & \times \left. \left(\frac{d \ln |G(j\omega)|}{d\omega} + j \frac{d\angle G(j\omega)}{d\omega} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.13)$$

Ainsi l'angle ψ est donné par :

$$\begin{aligned} \psi = & \angle \frac{dL(j\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega_c} = \varphi_c + \\ & \arctan \frac{(T_d T_i \omega_c^2 + 1) + (T_d T_i \omega_c^2 - 1) s_a(\omega_c) + s_p(\omega_c) T_i \omega_c}{s_a(\omega_c) T_i \omega_c - (T_d T_i \omega_c^2 - 1) s_p(\omega_c)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

où $s_a(\omega_c)$ et $s_p(\omega_c)$ sont respectivement les pentes en amplitude et en phase, exprimées dans le diagramme de Bode de $G(j\omega)$ en ω_c , à savoir :

$$s_a(\omega_c) = \frac{d \ln |G(j\omega)|}{d \ln \omega} \Big|_{\omega_c} = \omega_c \frac{d \ln |G(j\omega)|}{d\omega} \Big|_{\omega_c} \quad (3.15)$$

$$s_p(\omega_c) = \frac{d\angle G(j\omega)}{d \ln \omega} \Big|_{\omega_c} = \omega_c \frac{d\angle G(j\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega_c} \quad (3.16)$$

L'équation (3.14) est utilisée pour fixer la relation entre T_i et T_d en fonction de l'angle ψ choisi :

$$T_d = [s_a(\omega_c) - 1 + s_p(\omega_c) \tan(\psi - \varphi_c) - T_i \omega_c (s_p(\omega_c) - s_a(\omega_c) \tan(\psi - \varphi_c))] \times [\omega_c^2 T_i (1 + s_a(\omega_c) + s_p(\omega_c) \tan(\psi - \varphi_c))]^{-1} \quad (3.17)$$

Ainsi, à partir des expressions (3.5) et (3.17), les constantes T_d et T_i peuvent être calculées :

$$T_d = \frac{1}{2\omega_c} [(s_a(\omega_c) - s_p(\omega_c) \tan(\Phi_m - \varphi_c)) \tan(\psi - \varphi_c) + (1 - s_a(\omega_c)) \tan(\Phi_m - \varphi_c) - s_p(\omega_c)] \quad (3.18)$$

$$T_i = \frac{1}{\omega_c (T_d \omega_c - \tan(\Phi_m - \varphi_c))} \quad (3.19)$$

Le régulateur ainsi obtenu est entièrement décrit par les équations (3.4), (3.18) et (3.19). Son dimensionnement requiert cependant la connaissance de $s_a(\omega_c)$ et $s_p(\omega_c)$. La section suivante dévoile comment ces grandeurs peuvent être estimées de manière suffisamment précise pour la synthèse de $K(s)$, en ne connaissant que le gain statique du système à commander ainsi que $G(j\omega_c)$.

3.4 Intégrales de Bode

Les relations entre l'amplitude et la phase d'une fonction de transfert à phase minimale ont été étudiées pour la première fois par Bode [10]. Les résultats obtenus se fondent sur le théorème des résidus de Cauchy et ont été intensivement utilisés en électrotechnique pour l'analyse des réseaux. Deux intégrales sont présentées et permettent de lier directement l'amplitude et la phase d'un système à leurs dérivées.

3.4.1 Dérivée de l'amplitude

La première intégrale de Bode montre que la phase d'un système, à chaque fréquence, peut être exprimée en fonction de la dérivée de l'amplitude. Plus précisément, pour une fréquence ω_0 , l'expression suivante est

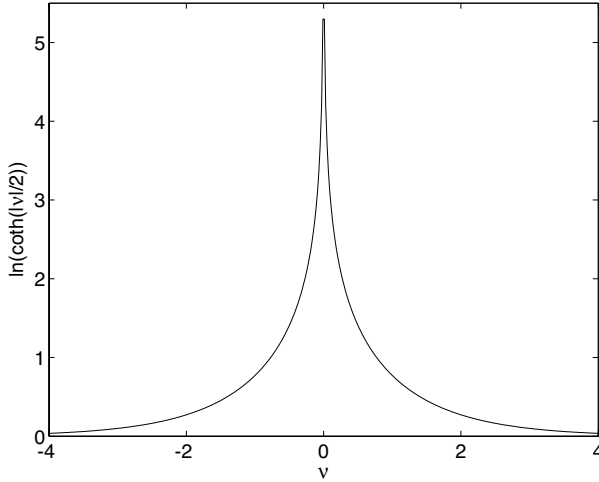


FIG. 3.3 – Tracé de la fonction pondérant l'intégrale de Bode.

vérifiée [10] :

$$\angle G(j\omega_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \ln |G(j\omega_0 e^\nu)|}{d\nu} \ln \coth \frac{|\nu|}{2} d\nu \quad (3.20)$$

où :

$$\nu = \ln \frac{\omega}{\omega_0} \quad (3.21)$$

Dans l'intégrale de l'équation (3.20), la pente de l'amplitude est multipliée par la fonction :

$$\ln \coth \frac{|\nu|}{2} \quad (3.22)$$

Le tracé de celle-ci est indiqué en figure 3.3. On y constate clairement qu'elle possède un maximum très marqué en ω_0 et que son amplitude décroît très rapidement aussitôt qu'on s'en éloigne. Ainsi cette fonction confère, dans l'intégrale, une très forte pondération aux pentes de l'amplitude aux abords de la pulsation ω_0 . En conséquence, en supposant ces dernières pratiquement constantes, dans une échelle logarithmique, autour de ω_0 , une estimation peut être formulée de la manière suivante :

$$\angle G(j\omega_0) \approx \frac{1}{\pi} \frac{d \ln |G(j\omega)|}{d\nu} \Big|_{\omega_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \coth \frac{|\nu|}{2} d\nu \quad (3.23)$$

Et comme :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \ln \coth \frac{|\nu|}{2} d\nu = \frac{\pi^2}{2} \quad (3.24)$$

on obtient finalement :

$$\angle G(j\omega_0) \approx \frac{\pi}{2} \left. \frac{d \ln |G(j\omega)|}{d\nu} \right|_{\omega_0} \quad (3.25)$$

Remarque 3.1 : Ce résultat est souvent utilisé par des méthodes de synthèse dans les diagrammes de Bode où la pente de l'amplitude, autour de la pulsation de croisement, est spécifiée à -20 dB/décade, de façon à obtenir approximativement une marge de phase de 90° .

Dans le cas présent, l'argument de $G(j\omega_0)$ est utilisé pour estimer la pente $s_a(\omega_0)$:

$$s_a(\omega_0) = \omega_0 \left. \frac{d \ln |G(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega_0} \approx \frac{2}{\pi} \angle G(j\omega_0) \quad (3.26)$$

3.4.2 Dérivée de la phase

La deuxième intégrale de Bode lie l'amplitude d'un système stable à phase minimale aux dérivées de la phase ainsi qu'au gain statique. Plus précisément, le logarithme népérien de l'amplitude de $G(j\omega_0)$ est donné par [10] :

$$\ln |G(j\omega_0)| = \ln |G(j0)| - \frac{\omega_0}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\angle G(j\omega_0 e^\nu)/(\omega_0 e^\nu))}{d\nu} \ln \coth \frac{|\nu|}{2} d\nu$$

De la même manière, en émettant l'hypothèse que $\angle G(j\omega)/\omega$ est linéaire sur une échelle logarithmique, au voisinage de ω_0 , les approximations suivantes peuvent être obtenues :

$$\begin{aligned} \ln |G(j\omega_0)| &\approx \ln |G(j0)| - \frac{\omega_0}{\pi} \left. \frac{d(\angle G(j\omega)/\omega)}{d\nu} \right|_{\omega_0} \frac{\pi^2}{2} \\ &\approx \ln |G(j0)| - \frac{\pi\omega_0}{2} \left[\left. \frac{d\angle G(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} - \frac{\angle G(j\omega_0)}{\omega_0} \right] \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} s_p(\omega_0) &= \omega_0 \left. \frac{d\angle G(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} \\ &\approx \angle G(j\omega_0) + \frac{2}{\pi} [\ln |G(j0)| - \ln |G(j\omega_0)|] \end{aligned} \quad (3.28)$$

Remarque 3.2 : Pour les systèmes contenant un intégrateur, le gain statique ne peut être calculé. Dans de tels cas, le gain statique ainsi que la réponse harmonique en ω_0 du système sans intégrateur doivent être estimés et utilisés dans l'équation ci-dessus, la phase d'un intégrateur étant en effet constante et sa dérivée nulle.

Contrairement à la première intégrale de Bode, la seconde est peu connue dans le domaine de l'automatique et n'a vraisemblablement jamais été utilisée pour la synthèse de régulateurs, avant les publications relatives au travail rapporté dans ce chapitre.

3.4.3 Précision des approximations

La précision des pentes estimées dépend tout particulièrement de la dynamique du système considéré, ainsi que de la pulsation, à laquelle l'évaluation est réalisée. De nombreuses simulations sur des modèles typiques de processus industriels ont cependant montré que l'erreur absolue normalisée se situe dans une fourchette acceptable. Pour donner une meilleure idée au lecteur de l'exactitude des résultats, le système suivant est considéré :

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^p} \quad (3.29)$$

où p représente un nombre réel positif. Les valeurs exactes de $s_a(\omega)$ et $s_p(\omega)/\omega$ sont calculées à l'aide du modèle pour différentes fréquences et sont ensuite comparées en figure 3.4 et 3.5 avec celles obtenues à l'aide des intégrales de Bode. Il peut être remarqué, eu égard à ces graphiques, que, pour ce système, l'erreur absolue normalisée ne dépasse pas 0.1. Des résultats similaires sont obtenus pour les systèmes formés par la mise en série de fonctions de transfert de premier ordre. De mauvaises approximations peuvent résulter en présence de modes oscillants. Toutefois, si la pulsation considérée ω_0 ne se situe pas au voisinage de celles abritant des résonances,

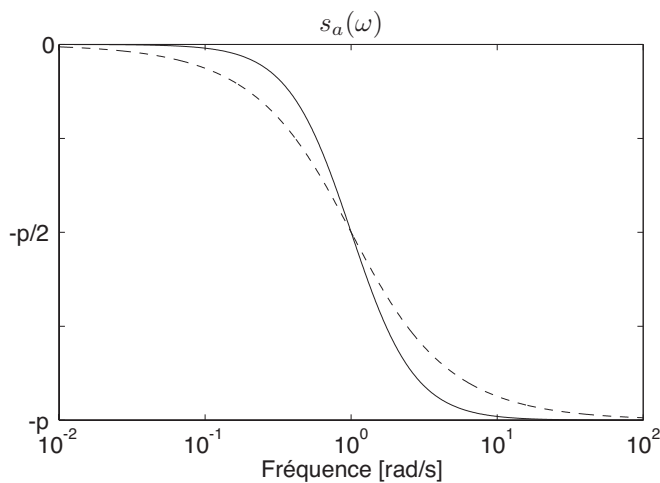


FIG. 3.4 – Comparaison entre la valeur exacte et estimée de s_a (— : valeur exacte ; --- : valeur estimée).

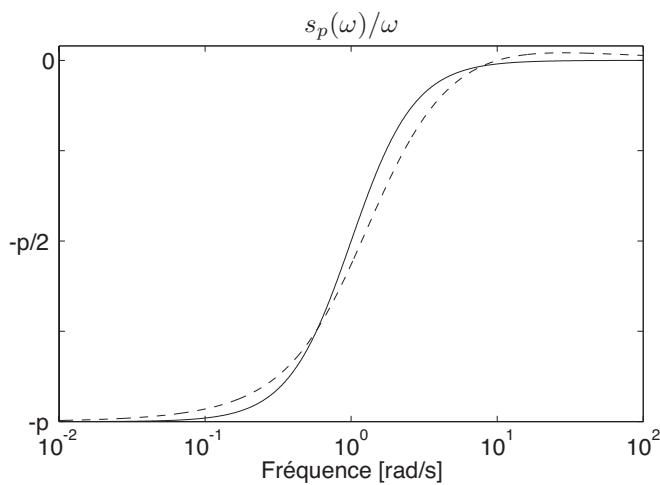


FIG. 3.5 – Comparaison entre la valeur exacte et estimée de s_p/ω (— : valeur exacte ; --- : valeur estimée).

les estimations sont généralement satisfaisantes. Pour les systèmes à non-minimum de phase, les intégrales de Bode ne sont plus valables et les valeurs obtenues pour s_a et s_p sont, dans bien des cas, incorrectes.

Effet d'un retard pur

Bien que le retard pur induise une phase non-minimale, il peut être démontré que l'ajout d'un tel élément ne détériore en rien l'estimation de s_p et que son effet sur la précision de s_a peut être négligé pour autant que sa valeur soit petite en comparaison de la constante de temps dominante du système.

La fonction de transfert suivante, contenant un retard pur τ , est considérée :

$$G_\tau(j\omega) = G_{pm}(j\omega)e^{-j\tau\omega} \quad (3.30)$$

où $G_{pm}(j\omega)$ est supposé stable à minimum de phase. En dérivant l'amplitude et la phase de $G_\tau(j\omega)$ par ω , les résultats suivants sont obtenus :

$$\frac{d \ln |G_\tau(j\omega)|}{d\omega} = \frac{d \ln |G_{pm}(j\omega)|}{d\omega} \quad (3.31)$$

$$\frac{d \angle G_\tau(j\omega)}{d\omega} = \frac{d \angle G_{pm}(j\omega)}{d\omega} - \tau \quad (3.32)$$

En utilisant maintenant l'intégrale de Bode de la relation (3.23), l'argument de $G_\tau(j\omega_0)$ peut être estimé comme suit :

$$\angle G_\tau(j\omega_0) = \angle G_{pm}(j\omega_0) - \tau\omega_0 \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \ln |G_{pm}(j\omega)|}{d\omega} \Big|_{\omega_0} - \tau\omega_0 \quad (3.33)$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{d \ln |G_\tau(j\omega)|}{d\omega} \Big|_{\omega_0} - \tau\omega_0 \quad (3.34)$$

Il s'ensuit que $s_a(\omega_0)$ et $s_p(\omega_0)$ peuvent, pour un système avec retard pur,

être évalués de la manière suivante :

$$s_a(\omega_0) = \omega_0 \left. \frac{d \ln |G_\tau(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega_0} \approx \frac{2}{\pi} (\angle G_\tau(j\omega_0) + \tau\omega_0) \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} s_p(\omega_0) &= \omega_0 \left. \frac{d \angle G_\tau(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} = \omega_0 \left. \frac{d \angle G_{pm}(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_0} - \tau\omega_0 \\ &\approx \angle G_{pm}(j\omega_0) + \frac{2}{\pi} [\ln |K_g| - \ln |G_{pm}(j\omega_0)|] - \tau\omega_0 \\ &\approx \angle G_\tau(j\omega_0) + \frac{2}{\pi} [\ln |K_g| - \ln |G_\tau(j\omega_0)|] \end{aligned} \quad (3.36)$$

Les équations ci-dessus montrent que le retard pur doit être connu pour une meilleure évaluation de $s_a(\omega_0)$, mais n'influe en rien sur la précision de $s_p(\omega_0)$.

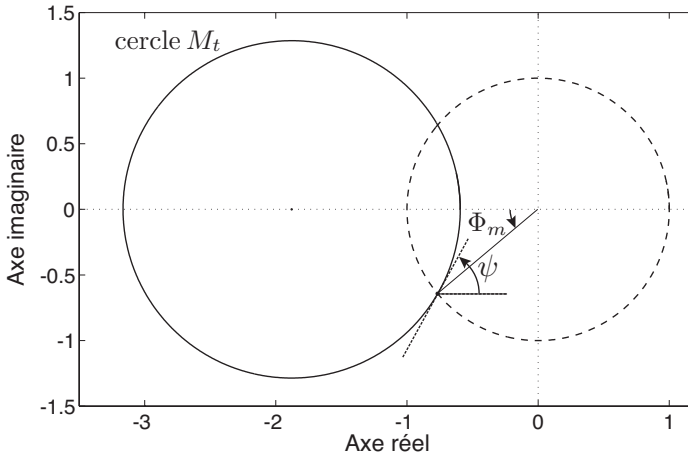
Remarque 3.3 : τ représente le retard pur d'un système, souvent associé à un délai de transport. Sa valeur, lorsqu'elle n'est pas négligeable, peut souvent être mesurée en pratique. τ ne doit cependant pas être confondu avec un retard pur résultant d'une modélisation. Lorsqu'un processus d'ordre élevé est décrit par une fonction de transfert d'ordre réduit, il en résulte souvent un large retard pur, qui n'est physiquement pas présent en tant que tel dans le système réel.

3.5 Choix de la pente

Maintenant que le dimensionnement du régulateur, octroyant une pente ψ en $L(j\omega_c)$, a été traité, il reste à choisir la valeur à lui donner de façon à obtenir des propriétés intéressantes pour le système résultant. Selon l'argumentation du chapitre 2 au sujet des spécifications fréquentielles, il ressort que les normes infinies des fonctions de sensibilité constituent des indicateurs privilégiés de performance et de robustesse. Il a ainsi été décidé de choisir ψ de façon à fixer des contraintes sur les maxima de $|T(j\omega)|$ et $|S(j\omega)|$.

3.5.1 Sensibilité complémentaire

Au départ, seule une contrainte sur la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire M_t est considérée. Une telle spécification implique,

FIG. 3.6 – Illustration de l'angle ψ lors d'une contrainte sur M_t .

dans le plan complexe, que la courbe $L(j\omega)$ soit tangente au cercle défini par M_t , dont le centre et le rayon sont donnés respectivement en équations (2.27) et (2.28) (cf. section 2.3). L'idée principale ici est de déterminer ψ de telle sorte que $L(j\omega)$ soit tangent en ω_c . La figure 3.6 illustre cette situation. Comme le montrent les figures 2.5 et 2.6, entre chaque cercle correspondant à une valeur différente de M_t et le cercle unité, une intersection distincte existe. En d'autres termes, le choix de la marge de phase détermine aussi bien la valeur de M_t que celle de l'angle ψ , car un seul cercle de sensibilité complémentaire coupe le cercle unité au point correspondant. La valeur M_t peut alors être obtenue en résolvant l'équation du cercle suivante :

$$\left(x + \frac{M_t^2}{M_t^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{M_t^2}{(M_t^2 - 1)^2} \quad (3.37)$$

avec :

$$x = \cos(\Phi_m - \pi) \quad (3.38)$$

$$y = \sin(\Phi_m - \pi) \quad (3.39)$$

Dans le plan complexe, $x + jy$ est le point sur le cercle unité, coïncidant avec la marge de phase Φ_m . En substituant les variables x et y de l'équation

(3.37), par les expressions indiquées en (3.38) et (3.39), l'équation suivante, de degré quatre en M_t , est obtenue :

$$M_t^4 (2 + 2 \cos(\Phi_m - \pi)) + M_t^2 (-3 - 2 \cos(\Phi_m - \pi)) + 1 = 0 \quad (3.40)$$

Sa résolution, qui peut être faite de manière analytique, livre la valeur recherchée :

$$M_t = \frac{1}{2 \sin \frac{\Phi_m}{2}} \quad (3.41)$$

Il ne reste maintenant plus qu'à déterminer la pente du cercle à l'endroit où il coupe le cercle unité. Sa valeur en radians est donnée par l'équation suivante :

$$\psi = \left| \arctan \left(-\frac{\cos \Phi_m + c_T}{\sin \Phi_m} \right) \right| \quad (3.42)$$

où c_T est le centre du cercle M_t , dont l'expression est rappelée ci-après :

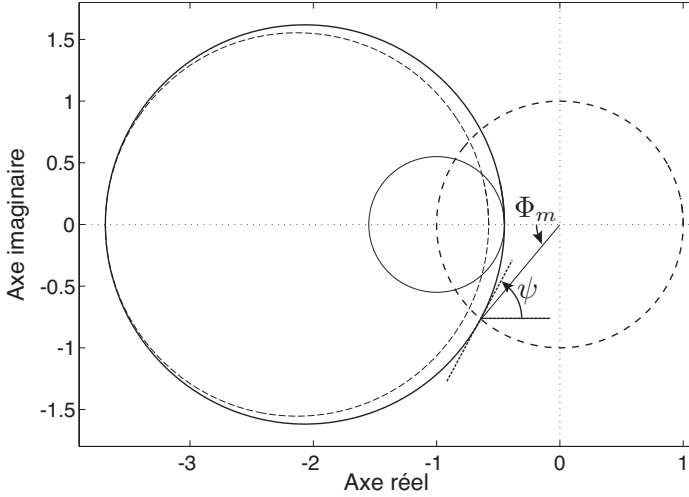
$$c_T = -\frac{M_t^2}{M_t^2 - 1} \quad (3.43)$$

Ainsi, à partir d'une spécification de marge de phase et de pulsation de croisement, le régulateur proposé peut être dimensionné à partir des équations (3.4), (3.18), (3.19), (3.26), (3.28), (3.41) et (3.42).

Remarque 3.4 : Au lieu de considérer une spécification sur Φ_m et ω_c , on peut voir le problème de manière inversée. Le point de départ peut être une valeur désirée de M_t et ω_c . La marge de phase correspondante découle alors de l'équation (3.41).

3.5.2 Sensibilité mixte

La procédure peut être généralisée à d'autres cercles. Supposons qu'une valeur plus grande que la borne inférieure garantie par une spécification sur M_t soit souhaitée pour la norme infinie de la fonction de sensibilité M_s . Pour chaque valeur de M_t , il est possible d'obtenir facilement le cercle le plus petit qui englobe ceux correspondant aux spécifications M_s et M_t . Le

FIG. 3.7 – Illustration de l'angle ψ lors de contraintes mixtes.

rayon et le centre d'un tel cercle sont respectivement :

$$r_{TS} = 0.5 \left(-1 + \frac{1}{M_s} + \frac{M_t}{1 - M_t} \right) \quad (3.44)$$

$$c_{TS} = 0.5 \left(-1 + \frac{1}{M_s} - \frac{M_t}{1 - M_t} \right) \quad (3.45)$$

Une telle configuration est représentée en figure 3.7. Il est ensuite possible, avec une spécification sur Φ_m , d'effectuer exactement la même procédure qu'auparavant. En d'autres termes, le cercle défini par les équations (3.44) et (3.45) et qui coupe le cercle unité à l'endroit correspondant à Φ_m doit être déterminé. Il est obtenu en résolvant l'équation :

$$(x - c_{TS})^2 + y^2 = r_{TS}^2 \quad (3.46)$$

où x et y sont définis selon les équations (3.38) et (3.39). L'équation (3.46) peut être résolue analytiquement et ne possède qu'une solution positive pour M_t . La pente ψ peut alors être déterminée et la réponse harmonique de la boucle, être dimensionnée de façon à être tangente au cercle.

3.6 Exemple de simulation

Un exemple est exposé ici pour illustrer la méthode. Le processus supposé inconnu est décrit par la fonction de transfert de premier ordre avec retard pur, proposée en [71] :

$$G(s) = \frac{1}{s+1} e^{-0.2s} \quad (3.47)$$

Les spécifications choisies pour la marge de phase et la pulsation de croisement sont :

$$\begin{aligned} \Phi_m &= 60^\circ \\ \omega_c &= 3 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

La valeur de $G(3j)$ est tout d'abord extraite par un simple essai harmonique. Un premier régulateur PID est ensuite dimensionné par la méthode modifiée de Ziegler-Nichols. Ce dernier déplace le point $G(3j)$ en un point de la réponse harmonique de la boucle, sur le cercle unité, avec une phase de $60^\circ - 180^\circ$.

Un deuxième régulateur est calculé avec la méthode proposée. En premier lieu, la valeur de M_t relative au cercle dont l'intersection avec le cercle unité coïncide avec la marge de phase de 60° , est déterminée. En résolvant l'équation (3.41), $M_t = 1$ est obtenu. Cette valeur correspond dans le plan complexe au lieu constitué d'un cercle dégénéré de rayon infini qu'est la droite verticale passant par $-0.5 + 0j$. La pente ψ à la pulsation de croisement est alors de 90° . Le régulateur est ainsi dimensionné, utilisant cette dernière valeur. La courbe de Nyquist de la boucle résultant de la synthèse est proposée en figure 3.8 a) et elle est comparée à celle obtenue par la méthode modifiée de Ziegler-Nichols.

Une valeur $M_t = 1$ garantit une distance minimale entre la courbe de Nyquist et le point critique de 0.5 et donc, une borne supérieure de 2 pour M_s . Supposons qu'une plus grande robustesse en stabilité soit souhaitée. La distance séparant la courbe du point critique est spécifiée à 0.6, ce qui équivaut à $M_s = 1.66$. En se basant sur les équations (3.44), (3.45) et (3.46), le cercle correspondant aux sensibilités mixtes peut alors être obtenu et la synthèse du régulateur, effectuée. À nouveau, les diagrammes de Nyquist sont comparés en figure 3.8 b). Les cercles de sensibilité y sont également décrits. Un léger conservatisme est introduit en considérant un cercle de

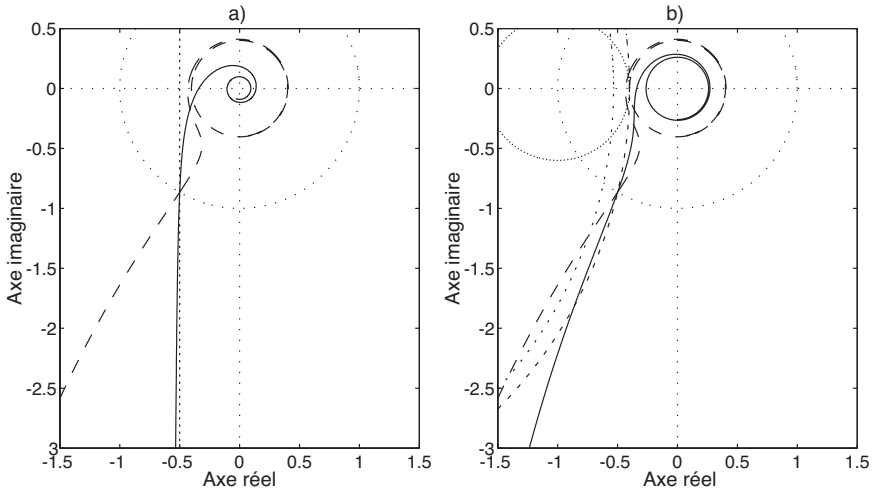


FIG. 3.8 – Diagramme de Nyquist (— : méthode proposée; --- : Ziegler-Nichols modifié).

TAB. 3.1 – Résultat de la synthèse.

Méthode	K_p	T_i	T_d	M_t	M_s
Ziegler-Nichols modifiée	3.07	0.5203	0.13007	1.18	1.75
Contrainte sur M_t	3.07	1.016	0.0258	1.01	1.64
Sensibilités mixtes	3.07	0.6658	0.0834	1.10	1.54

sensibilité mixte. On peut également constater que les réponses harmoniques résultant de la méthode proposée sont calibrées de manière appropriée dans cette zone de fréquences, cruciale pour les performances et la robustesse.

Les réponses à un saut indicel obtenues en boucle fermée sont rapportées en figure 3.9. On y constate clairement que les commandes proposées améliorent le comportement temporel en terme de dépassement et en temps d'établissement.

Le détail des résultats de synthèse ainsi que les valeurs obtenues pour la norme infinie des fonctions de sensibilité sont exposées en table 3.1. Celles-ci sont proches des valeurs requises.

Quelques remarques s'imposent ici sur les résultats qu'offre en général la méthode. Les spécifications émises sur M_s et M_t ne peuvent pas, à proprement parler, être garanties. D'une part, les relations provenant des inté-

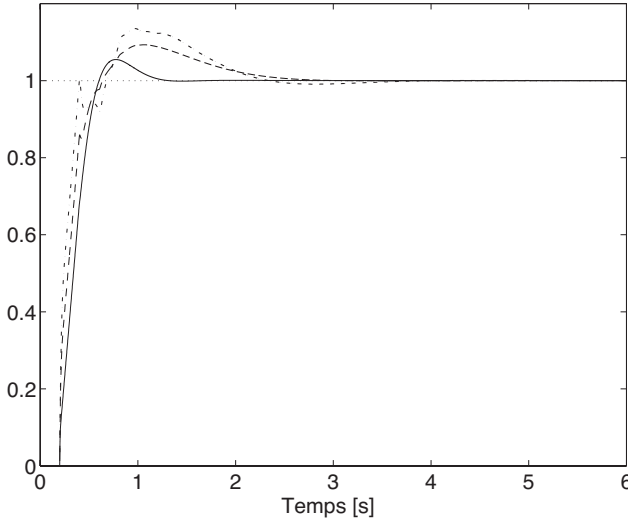


FIG. 3.9 – Réponses indicielles (— : contraintes sur M_t ; --- : sensibilités mixtes; · - · - : Ziegler-Nichols modifié).

grales de Bode ne sont que des approximations. Elles conduisent à obtenir une pente ψ en $L(j\omega_c)$ qui diffère quelque peu de celle désirée. D'autre part, même si la pente est parfaitement ajustée, la condition de tangentialité n'est pas, en soi suffisante pour garantir que la courbe ne pénètre pas dans un cercle donné. Cette dernière peut y entrer à d'autres fréquences. Cela peut être le cas, par exemple, pour des systèmes complexes d'ordre élevé. Bien que les spécifications soient remplies localement en ω_c , le comportement peut rapidement changer et conduire à de mauvais résultats. Malgré tout, comme la méthode ne requiert pratiquement pas plus d'efforts de synthèse que celle de Ziegler-Nichols modifiée, elle peut constituer une très bonne alternative quand cette dernière donne des résultats insatisfaisants.

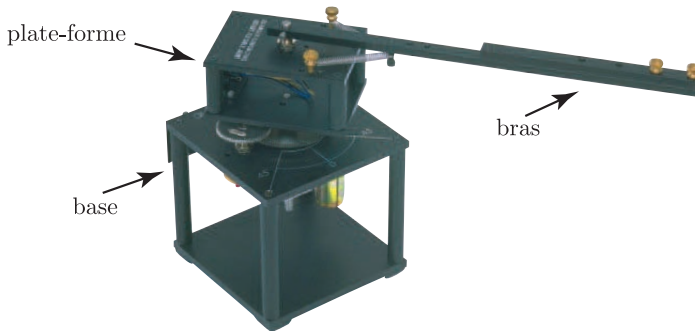


FIG. 3.10 – Transmission flexible.

3.7 Application

La méthode a également été appliquée à un système réel construit par l'entreprise Quanser¹. L'appareil, dont une photo est disponible en figure 3.10, consiste en une plate-forme posée sur une base fixe et surmontée d'un bras à transmission flexible. La plate-forme est entraînée dans un mouvement de rotation par un moteur à courant continu. Le couplage entre les deux modules est fait de manière rigide à l'aide de roues dentées. Le bras est rattaché par son extrémité au centre de la plate-forme. L'attache est conçue de telle sorte qu'il puisse effectuer librement un mouvement de rotation. Deux ressorts, dont les extrémités sont attachées à la plate-forme et au bras, contrôlent le déplacement de ce dernier et assurent ainsi une transmission flexible entre les deux pièces. Deux potentiomètres sont montés sur l'installation. Le premier est fixé sur la plate-forme. Son axe mesure la position relative de l'articulation. Le deuxième détermine la position du moteur. La sortie considérée est la position absolue en radians de l'extrémité du bras (somme des signaux des deux potentiomètres). L'entrée consiste, quant à elle, en une tension appliquée, après amplification, aux bornes du moteur.

La fonction de transfert, représentant la dynamique entre la tension appliquée au moteur et sa position, contient, théoriquement, un intégrateur, si bien qu'une structure de commande PD doit suffire. En réalité, cependant, aucun effet intégrateur exact n'est présent. Les frottements secs ainsi que les

¹www.quanser.com

jeux des engrenages donnent naissance à un statisme non négligeable lors de réponses indicielles, quand le processus est contrôlé par un régulateur dépourvu de terme intégrateur. Pour cette raison, une structure PID est choisie. Cette dernière garantit l'élimination de l'erreur permanente aussi bien lors d'un montage en asservissement qu'en rejet de perturbations. La relation $T_i = 4T_d$ n'est en revanche pas un choix judicieux pour ces systèmes ayant un pôle réel proche de l'origine. Afin d'obtenir un haut niveau de stabilité et un dépassement raisonnable lors d'une réponse indicelle, la constante T_i doit être choisie suffisamment grande, comparée à la dynamique du système. En d'autres termes, l'intégrateur du régulateur doit agir seulement en basses fréquences, afin de ne pas ajouter une perte de phase supplémentaire à celle induite par le pôle lent du système à commander, aux fréquences déterminantes pour les marges de robustesse.

Les spécifications suivantes sont émises pour la synthèse du PID :

$$\Phi_m = 60^\circ \quad (3.48)$$

$$\omega_c = 10 \text{ rad/s} \quad (3.49)$$

Le point de la réponse harmonique du système à la pulsation considérée est extrait par un simple essai harmonique. Un premier régulateur, dont les paramètres sont représentés dans la table 3.2, résulte de l'application de la méthode modifiée de Ziegler-Nichols. La démarche exposée dans ce chapitre est, par la suite, appliquée pour l'amélioration de la commande. Comme il a été mentionné dans l'exemple précédent (en pages 61 et suivantes), en ne considérant que les cercles de sensibilité complémentaire, la marge de phase considérée implique une valeur de $M_t = 1$ et donc une pente $\psi = 90^\circ$ en ω_c (voir figure 3.8 a)). En utilisant un tel angle ψ lors du dimensionnement du régulateur, des valeurs négatives sont obtenues pour la constante d'intégration et celle de dérivation. La raison en est simple : cette pente ne peut être obtenue. Une explication intuitive peut être donnée comme suit : La boucle contient quasiment deux intégrateurs. Ainsi, dans le diagramme de Nyquist, $L(0j) = -\infty$. La pente de la réponse harmonique doit, en une majorité de fréquences, former un angle aigu de sorte que $L(j\infty) = 0$. C'est le cas en ω_c . Les mêmes spécifications qu'en figure 3.8 b) sont alors considérées ($\Phi_m = 60^\circ$, $M_s = 1.66$). Il en résulte un cercle de sensibilité mixte coupant le cercle unité avec un angle aigu de 76.83° . Cette dernière valeur est utilisée pour la synthèse. Le régulateur qui en résulte est présenté en table 3.2.

TAB. 3.2 – Résultat de la synthèse.

Méthode	K_p	T_i	T_d
Ziegler-Nichols modifiée	3.18	0.223	0.0559
Proposée	3.18	1.49	0.017

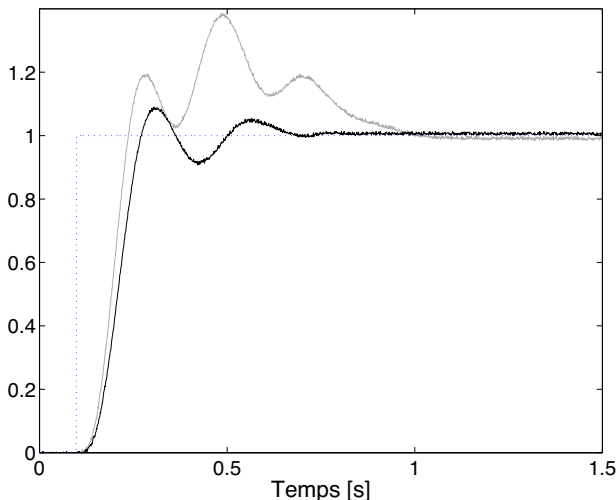


FIG. 3.11 – Réponses indicielles (ligne grise : méthode modifiée de Ziegler-Nichols ; noire : solution proposée).

On y observe que la constante d'intégration est multipliée quasiment d'un facteur sept par rapport à la solution initiale. La valeur T_i/T_d obtenue est d'environ 88. Comme les figures 3.11 et 3.12 le montrent, pour l'exemple considéré, de meilleurs résultats sont obtenus lors de réponses indicielles en boucle fermée avec ce rapport qu'avec le nombre 4. Le dépassement ainsi que le temps d'établissement s'en trouvent considérablement réduits.

3.8 Conclusions

Une approche très similaire à la méthode de Ziegler-Nichols modifiée a été considérée dans ce chapitre. Au lieu de choisir un rapport constant entre la constante d'intégration et de dérivation, celui-ci est ajusté de sorte

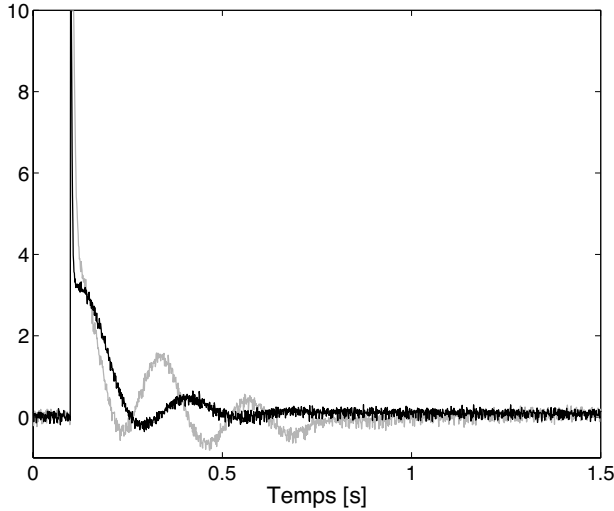


FIG. 3.12 – Grandeurs de commande (ligne grise : méthode modifiée de Ziegler-Nichols ; noire : solution proposée).

à obtenir la pente choisie à la pulsation de croisement. Par conséquent, la réponse harmonique de la boucle peut être calibrée plus précisément qu'avec la procédure de Ziegler-Nichols. Des contraintes sur les normes infinies des fonctions de sensibilité sont exploitées afin de faciliter le choix de la pente. La démarche proposée garde l'avantage de la simplicité, car, grâce aux intégrales de Bode, seuls le gain statique et le point de la réponse harmonique du processus correspondant à la pulsation de croisement souhaitée doivent être connus pour le dimensionnement du régulateur. Comme les spécifications peuvent être choisies de manière très simple et que la solution du problème est obtenue facilement en résolvant analytiquement des équations algébriques, cette démarche constitue une alternative à la méthode traditionnelle lorsque celle-ci ne procure pas entière satisfaction. Les résultats obtenus, comme l'ont montré les exemples étudiés, peuvent s'en trouver parfois passablement améliorés.

Notons enfin que les intégrales de Bode ont différentes applications intéressantes dans les domaines où des dérivées doivent être estimées sans la présence d'un modèle paramétrique permettant leur calcul. En [11], les

auteurs se sont inspirés des publications relatives au travail présenté dans ce chapitre et proposent de choisir la pente de la réponse harmonique de la boucle en une certaine fréquence, de telle sorte que le système bouclé possède des propriétés d'amortissement indépendantes du gain de la boucle. Une autre utilité de ces intégrales sera révélée dans le chapitre suivant, où, de manière similaire, la synthèse n'est pas basée sur un modèle du système à commander.

Chapitre 4

Ajustement itératif sans modèle

4.1 Introduction

Une méthode d'ajustement de régulateurs PID, dérivée de celle de Ziegler-Nichols modifiée, a été présentée dans le chapitre précédent. Sa mise en œuvre est extrêmement facile, car seule une identification très sommaire doit être réalisée et l'algorithme de commande qui s'ensuit est formulé de manière analytique. De telles procédures permettent souvent, parfois même de manière automatisée, d'obtenir rapidement un régulateur remplissant le cahier des charges. Elles sont particulièrement appréciées pour les systèmes simples ainsi que pour ceux dont les performances requises en boucle fermée sont modestes. Mais elles ne répondent pas toujours aux exigences quand il s'agit de processus plus complexes où une calibration locale, en une pulsation, ne suffit pas à l'obtention globale de la robustesse souhaitée. Dans ce contexte, il est fondamental de se tourner vers d'autres méthodes. Pour mieux calibrer la réponse harmonique de la boucle, il est nécessaire de la considérer en plusieurs endroits, et non en une seule pulsation.

La méthode proposée dans ce chapitre utilise cette philosophie, tout en conservant, à des fins de simplicité, une approche sans modèle du système à commander, exempte de procédures d'identification paramétrique, pouvant parfois se révéler complexes. Par rapport à la méthodologie présentée au chapitre 3, celle qui est exposée dans les pages qui suivent, permet d'obtenir

de meilleurs résultats, même si elle paie inévitablement, en contrepartie, le prix d'une augmentation de l'effort de synthèse. De nombreux autres avantages la caractérisent également :

1. Le choix des paramètres de synthèse est flexible. Chacune des caractéristiques fréquentielles présentées en section 2.3.6 peut être prise en compte pour le dimensionnement du régulateur. Pour rappel, celles-ci sont les marges de phase Φ_m , et de gain M_g , la pulsation de croisement ω_c ainsi que les normes infinies des fonctions de sensibilité M_s et M_t . La valeur des spécifications peut être choisie librement par l'utilisateur.
2. Un compromis entre la simplicité de l'ajustement et les performances obtenues peut être fait par le choix des paramètres de synthèse. Les normes infinies des fonctions de sensibilité constituent de meilleurs indicateurs que les marges de phase et de gain. Toutefois, la mesure de ces dernières peut être réalisée plus rapidement et la procédure d'ajustement s'en trouve ainsi écourtée. Ainsi l'utilisateur peut choisir le compromis entre l'effort consenti à l'ajustement et les exigences vis-à-vis des performances désirées.
3. L'approche est flexible vis-à-vis de la structure du régulateur. Seule l'hypothèse est faite que sa fonction de transfert est linéaire. En conséquence, non seulement la forme standard d'un PID de l'équation (2.2) peut être considérée, mais également les structures couramment rencontrées en pratique, qui peuvent comporter un ou plusieurs filtres (cf équation 2.6), ou encore celles dont la dérivée est effectuée directement à partir de la grandeur à commander (et non à partir du signal d'écart). Bien que, dans cet ouvrage, seule la commande PID soit traitée, la méthodologie développée n'est nullement limitée à celle-ci. On peut aisément imaginer l'emploi d'autres structures d'ordre réduit que sont, par exemple, les éléments à avance ou retard de phase¹.

À partir d'un régulateur initial stabilisant, qui peut être obtenu, par exemple, à l'aide de la méthode présentée dans le chapitre précédent, la démarche proposée vise, par une optimisation, à ajuster itérativement les spécifications émises sur les marges de robustesse. Comme aucun modèle du système à commander n'est utilisé, la valeur des marges doit pouvoir être

¹en anglais *lead-lag elements*

mesurée à l'aide d'expériences ad hoc. Celles-ci sont présentées en section 4.2 et se fondent sur des schémas de mesure non linéaires, dérivés de celui du test standard du relais. Un critère fréquentiel, défini par la somme pondérée des erreurs au carré entre les valeurs mesurées et celles spécifiées, est ensuite introduit en section 4.3. La solution au problème d'optimisation, détaillée en section 4.4, est donnée par l'algorithme de Gauss-Newton. Ce dernier, de type gradient, requiert la connaissance des dérivées du critère. Celles-ci seront développées en section 4.5 et exploitent sporadiquement les approximations offertes par les intégrales de Bode. Comme leur validité est cependant limitée aux systèmes stables à minimum de phase, une extension est suggérée en section 4.6 pour les processus violant ces hypothèses. Différents exemples de simulations et applications temps réel illustrent en sections 4.7 et 4.8, respectivement, la méthode de synthèse. Finalement, quelques remarques sont formulées en section 4.9, en guise de conclusion.

Les différents aspects étudiés dans ce chapitre ont également fait l'objet d'articles de journaux [27, 28, 43] et de conférences [26, 30, 31, 32] ces dernières années, co-écrites par l'auteur du présent mémoire.

4.2 Mesure des marges de robustesse

L'approche présentée pour le dimensionnement de régulateurs nécessite, lors de chaque itération, l'évaluation des valeurs actuelles des paramètres de synthèse choisis. Différentes techniques existent pour mesurer ces marges de robustesse ainsi que les fréquences associées [5, 13, 74]. Parmi celles-ci, les tests de type relais, fondés sur l'analyse de cycles limites obtenus par des expériences non linéaires, sont particulièrement appréciés. Différentes évolutions de la méthode standard, représentée en figure 2.10, et dédiée à l'identification du point critique du système à commander, ont mené à des schémas plus avancés, dont le but est l'estimation, en boucle fermée, des marges de robustesse. Ces schémas sont présentés dans cette section. Alors que certains d'entre eux existaient déjà dans la littérature, d'autres ont été imaginés durant le travail lié à cette thèse.

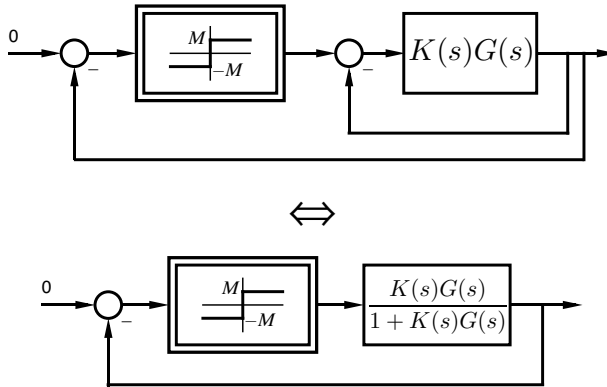


FIG. 4.1 – Test du relais permettant la mesure de la marge de gain.

4.2.1 Mesure de la marge de gain

La structure en rétroaction avec un relais peut être appliquée aux systèmes en boucle fermée contenant un régulateur linéaire. Le schéma de la figure 4.1, présenté en [7], représente une telle architecture. Un avantage considérable de cette configuration, comparée au schéma standard, est que la sortie du bloc relais est devenue le signal de référence du système bouclé. Le choix de son amplitude se voit ainsi facilité, car cette grandeur a généralement une signification bien plus intuitive que celle de commande. D'autre part, le schéma peut aisément être intégré à une structure en contre-réaction déjà existante, car son implantation ne nécessite pas l'ouverture de la boucle. La seule modification devant être réalisée est l'ajout d'un élément tout-ou-rien en amont du signal de consigne. Les problèmes potentiels liés à l'instabilité sont automatiquement écartés puisque la stabilité ne s'en trouve aucunement modifiée. En outre, un système à commander instable en boucle ouverte peut tout aussi bien être pris en compte, pour autant qu'il soit stabilisé par le régulateur linéaire.

En étudiant la figure 4.1, on conçoit facilement que la condition nécessaire pour l'apparition d'un régime oscillatoire permanent est donnée, en utilisant l'hypothèse du premier harmonique, par [53] :

$$\frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} = -\frac{\pi A}{4M} \quad (4.1)$$

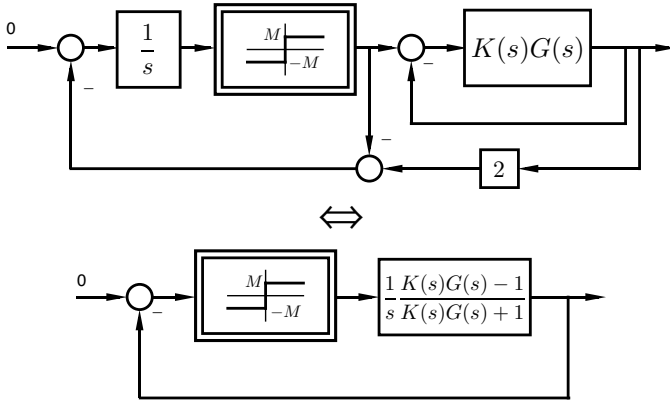


FIG. 4.2 – Test du relais permettant la mesure de la marge de phase.

où, pour rappel, A et M décrivent respectivement l'amplitude des signaux à l'entrée et à la sortie de l'élément non linéaire. Cette équation est équivalente à l'égalité suivante :

$$L(j\omega) = -\frac{\pi A}{4M + \pi A} \in (-1, 0) \quad (4.2)$$

Ainsi, l'apparition d'un cycle limite est soumise à l'existence d'un point d'intersection entre la réponse harmonique de la boucle et le segment de droite $(-1, 0)$. L'analyse de l'oscillation permet alors l'identification du point critique $L(j\omega_u)$ ainsi que de la fréquence associée ω_u . La marge de gain est alors obtenue simplement par :

$$M_g = \frac{1}{|L(j\omega_u)|} \quad (4.3)$$

4.2.2 Mesure de la marge de phase

La structure de la figure 4.2 a été proposée en [68] pour générer des oscillations dont la pulsation est celle de croisement. Il a été démontré en [53] que ce schéma peut servir à l'estimation de la marge de phase.

La condition nécessaire à la génération d'un cycle limite est donnée, en

faisant appel à l'hypothèse du premier harmonique, par :

$$\frac{1}{j\omega} \frac{L(j\omega) - 1}{L(j\omega) + 1} = -\frac{\pi A}{4M} \quad (4.4)$$

Il en découle la relation suivante :

$$L(j\omega) = \frac{1 - j\frac{\omega\pi A}{4M}}{1 + j\frac{\omega\pi A}{4M}} \quad (4.5)$$

En considérant le module et l'argument de chaque terme de l'équation précédente, on obtient les résultats suivants :

$$|L(j\omega)| = \left| \frac{1 - j\frac{\omega\pi A}{4M}}{1 + j\frac{\omega\pi A}{4M}} \right| = 1 \quad (4.6)$$

$$\angle L(j\omega) = -2 \arctan \left(\frac{\omega\pi A}{4M} \right) \in [0, -\pi] \quad (4.7)$$

Ainsi, l'apparition d'un régime oscillatoire permanent implique qu'il existe une intersection entre la réponse harmonique de la boucle et la partie du cercle unité situé dans le demi-plan complexe des valeurs imaginaires négatives. Ce point correspond à la marge de phase qui peut donc être estimée comme suit :

$$\Phi_m = \pi - 2 \arctan \left(\frac{\omega\pi A}{4M} \right) \quad (4.8)$$

La pulsation associée est celle de croisement ω_c .

La précision des estimations des marges, résultant des procédés de mesure des figures 4.2 et 4.1 peut se retrouver passablement altérée par la présence d'harmoniques de rang supérieur, générés par l'élément tout-ou rien et faiblement amortis par des fonctions de transfert d'ordre relatif faible (voir figure 4.2). Par conséquent, il est conseillé de remplacer ce dernier, en suivant les remarques prodiguées en section 2.4.3, par une saturation, dont la pente k , variant en fonction du temps, est donnée par l'expression (2.56).

4.2.3 Mesure de la norme infinie de la fonction de sensibilité

Les marges de phase et de gain peuvent être déterminées de manière très simple à l'aide d'une seule mesure, car elles sont définies par des projections

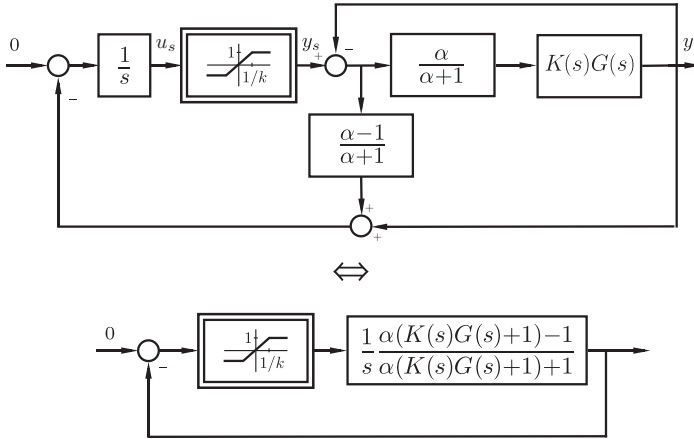


FIG. 4.3 – Schéma permettant de mesurer la norme infinie de la fonction de sensibilité.

de la robustesse sur des espaces unidimensionnels, que sont, respectivement, le cercle unité et l'axe réel négatif. La norme infinie de la fonction de sensibilité M_s , ne possédant pas, quant à elle, une telle interprétation, nécessite une procédure plus complexe. Dans ce travail de thèse, une solution également dérivée de la philosophie du relais est proposée pour son évaluation.

La structure prônée pour la mesure de M_s est reproduite en figure 4.3, où α représente un nombre réel positif et les grandeurs u_s , y_s et y sont respectivement les signaux d'entrée et de sortie de la saturation, ainsi que la sortie du système. $K(s)$ est la fonction de transfert d'un régulateur stabilisant la boucle fermée :

$$\frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} \quad (4.9)$$

Sans restriction de la généralité, l'amplitude de saturation est fixée à l'unité. Une exigence de base doit tout d'abord être formulée au sujet de la stabilité du système. La fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{Y_s(s)} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha+1}K(s)G(s)}{1 + \frac{\alpha}{\alpha+1}K(s)G(s)} \quad (4.10)$$

est supposée stable. Cette hypothèse n'est, en soi, pas contraignante, car le facteur $\alpha/(\alpha+1)$ multipliant la fonction de transfert de la boucle est

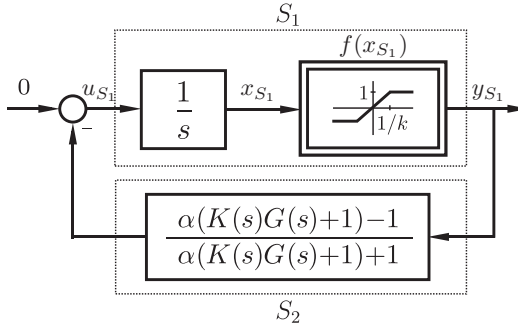


FIG. 4.4 – Schéma équivalent permettant l'analyse de passivité.

toujours inférieur à 1. Or, si le système à commander et le régulateur ne possèdent pas de pôles strictement instables, une réduction du gain de la boucle est en général autorisée et n'induit pas une perte de la stabilité.

Analyse de passivité

Une première propriété intéressante, intrinsèque à la structure décrite en figure 4.3, est celle de passivité, lorsque le paramètre α est strictement plus grand que M_s . Cette caractéristique implique qu'en terme énergétique le système est dissipatif et qu'aucun cycle limite ne peut ainsi être généré. La démonstration de passivité est décrite ci-après.

Pour ce faire, le système équivalent de la figure 4.4 est considéré. Celui-ci est subdivisé en deux sous-systèmes S_1 et S_2 . Alors que S_1 est composé de la mise en série de l'intégrateur et de l'élément non linéaire, la fonction de transfert S_2 est définie de la manière suivante :

$$S_2(s) = \frac{\alpha(K(s)G(s) + 1) - 1}{\alpha(K(s)G(s) + 1) + 1} \quad (4.11)$$

La théorie de la passivité [69] est la formalisation de l'intuition qui veut que les fonctions Lyapunov décrivant des sous-systèmes puissent être « additionnées ». En d'autres termes, certaines opérations entre sous-systèmes conservent la passivité. C'est le cas notamment de l'interconnexion en série, en parallèle ou en rétroaction. Par conséquent, dans le cas présent, la passivité peut être démontrée en considérant de manière séparée celle des

sous-systèmes S_1 et S_2 . Si l'un d'eux est passif et l'autre l'est strictement, le système résultant possède alors la propriété de passivité stricte [69].

Pour démontrer la passivité de S_1 , la définition de ce concept pour un système SISO est rappelée ci-après :

Un système est passif (mais pas strictement) s'il existe une fonction V bornée vers le bas ainsi qu'une fonction $g(t) \geq 0$, telle que :

$$\dot{V}(t) = y(t)u(t) - g(t) \quad (4.12)$$

où $u(t)$ et $y(t)$ décrivent respectivement l'entrée et la sortie du système considéré. Le système S_1 peut être décrit par sa représentation d'état :

$$\dot{x}_{S_1}(t) = u_{S_1}(t) \quad (4.13)$$

$$y_{S_1}(t) = f(x_{S_1}(t)) \quad (4.14)$$

où u_{S_1} , y_{S_1} , x_{S_1} sont respectivement l'entrée, la sortie ainsi que la variable interne du système. La saturation est symbolisée par la fonction non linéaire f .

Considérons la fonction V :

$$V = \int_0^{x_{S_1}} f(\sigma) d\sigma \geq 0 \quad (4.15)$$

La dérivée temporelle de cette fonction peut s'écrire :

$$\dot{V} = \frac{d}{dt} \int_0^{x_{S_1}} f(\sigma) d\sigma = f(x_{S_1})\dot{x} = y_{S_1}u_{S_1} - g(t) \quad (4.16)$$

où $g(t) \equiv 0$. Ainsi, comme la condition de passivité émise en (4.12) est vérifiée, le système S_1 est passif.

La passivité stricte du sous-système S_2 peut être établie de deux façons. L'une d'elles consiste à montrer que S_2 est strictement positif réel [69] et par conséquent, si on utilise les équivalences liant ces deux concepts, strictement passif. Une autre démonstration bien plus élégante est offerte ici. Celle-ci se fonde sur les relations existantes entre les théorèmes du petit gain et de la passivité, étudiées en [1], qui démontrent, en particulier, que tout système dont la norme infinie est strictement inférieure à l'unité, peut être transformé en un système passif. La formulation réciproque est également vérifiée. En d'autres termes, soit la fonction de transfert stable $E(s)$, si la condition suivante est satisfaite :

$$\|E(s)\|_{\infty} < 1 \quad (4.17)$$

alors la passivité du système décrit ci-après peut être établie :

$$(I - E(s))(I + E(s))^{-1} \quad (4.18)$$

En substituant $E(s)$ par :

$$E(s) = \frac{1}{\alpha(1 + K(s)G(s))} \quad (4.19)$$

on obtient, de manière analogue, que si la condition suivante est vérifiée :

$$\left\| \frac{1}{1 + K(s)G(s)} \right\|_{\infty} < \alpha \quad (4.20)$$

alors la fonction :

$$\frac{\alpha(K(s)G(s) + 1) - 1}{\alpha(K(s)G(s) + 1) + 1} = S_2 \quad (4.21)$$

est strictement passive.

Ainsi, puisque S_1 est passif et S_2 strictement passif lorsque $\alpha > M_s$, le système représenté en figure 4.3 est strictement passif lorsque cette même condition est satisfaite.

Existence de cycles limites

Le cas où $\alpha \leq M_s$ est considéré maintenant. La méthode du premier harmonique est notamment utilisée pour démontrer l'existence de cycles limites et étudier leurs caractéristiques.

La condition nécessaire pour l'obtention d'un régime oscillatoire permanent est ainsi donnée par la relation suivante :

$$\frac{1}{j\omega} \frac{\alpha(L(j\omega) + 1) - 1}{\alpha(L(j\omega) + 1) + 1} = -\frac{1}{N_s(A)} \quad (4.22)$$

où le gain équivalent N_s de la saturation est représenté en équation (2.47). Pour simplifier la notation par la suite, la fonction vue par la saturation est notée comme suit :

$$F_{\alpha} = \frac{1}{j\omega} \frac{\alpha(L(j\omega) + 1) - 1}{\alpha(L(j\omega) + 1) + 1} \quad (4.23)$$

Ainsi la condition nécessaire à l'apparition d'un cycle limite est donnée par la présence d'une intersection entre la fonction $F_{\alpha}(j\omega)$ et le lieu $(-\infty, -1/k)$ porté par l'axe réel négatif.

L'équation (4.22) est équivalente à :

$$\frac{1}{j\omega} \frac{1 - \frac{1}{\alpha(L(j\omega)+1)}}{1 + \frac{1}{\alpha(L(j\omega)+1)}} = -\frac{1}{N_s(A)} \quad (4.24)$$

à partir de quoi l'égalité suivante est obtenue :

$$\frac{1}{1 + L(j\omega)} = \alpha \left(\frac{-1 - j\omega \frac{1}{N_s(A)}}{-1 + j\omega \frac{1}{N_s(A)}} \right) \quad (4.25)$$

En considérant finalement le module et l'argument de chaque terme de l'équation précédente, il en découle les résultats suivants :

$$\left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| = \alpha \quad (4.26)$$

$$\angle \left(\frac{1}{1 + L(j\omega)} \right) = 2 \arctan \left(\frac{\omega}{N_s(A)} \right) \in (0, \pi) \quad (4.27)$$

Par conséquent, l'existence d'un cycle limite est soumise, dans le plan complexe, à la présence d'un point d'intersection entre la réponse harmonique de la fonction de sensibilité et la partie du cercle de rayon α situé dans le demi-plan des valeurs imaginaires positives.

L'existence d'oscillations peut être visualisée dans plusieurs diagrammes différents. Deux représentations en particulier sont considérées ici.

1. Diagramme de Nyquist de la boucle : si on utilise cette description pour démontrer l'existence de cycles limites, il doit y avoir des intersections entre la courbe $L(j\omega)$ et la partie du cercle centrée en -1 de rayon $1/\alpha$ situé dans le demi-plan inférieur. En figure 4.5, cette condition est illustrée pour deux valeurs du paramètre α .
2. Diagramme de Nyquist de la fonction $F_\alpha(j\omega)$: cette représentation est importante du fait que $F_\alpha(j\omega)$ est la fonction vue par la saturation. Une étude de stabilité est plus aisée si on privilégie cette description. En figure 4.6, des exemples de courbes de $F_\alpha(j\omega)$ y sont représentées pour deux valeurs différentes du paramètre α . L'existence d'un cycle limite est ici dépendante de la présence d'un point d'intersection entre les deux courbes F_α et le gain équivalent de la non-linéarité représenté par l'axe réel négatif.

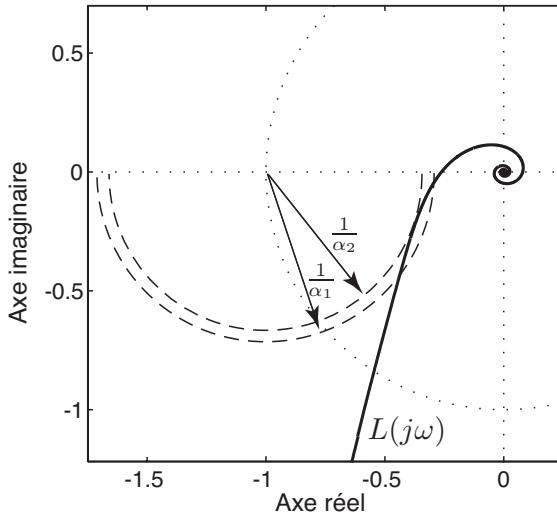


FIG. 4.5 – Illustration de l’existence d’un cycle limite dans le diagramme de Nyquist de la boucle.

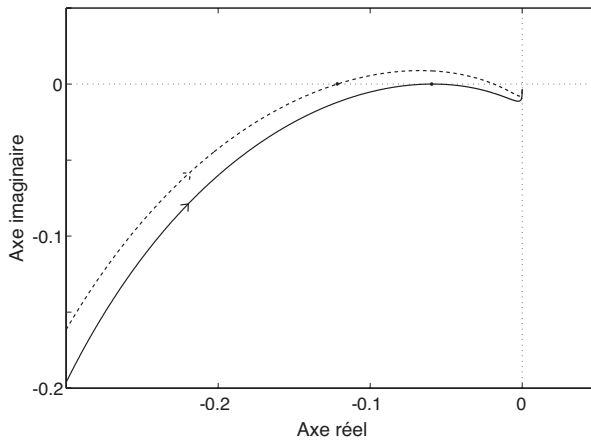
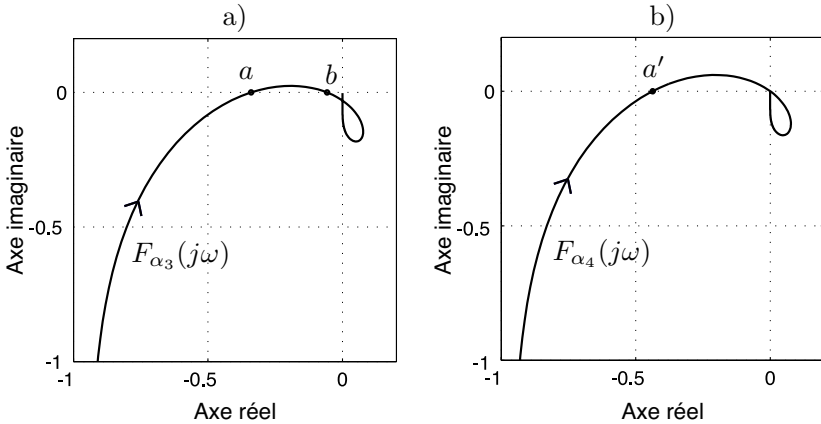


FIG. 4.6 – Illustration de l’existence d’un cycle limite dans le diagramme de Nyquist de la fonction F_α .

FIG. 4.7 – Diagrammes de Nyquist de la fonction F_α .

Stabilité et manifestation d'un cycle limite

L'existence d'un cycle limite n'implique ni sa stabilité ni même, si cette dernière condition est remplie, sa manifestation. Dans cette sous-section, ces divers aspects sont traités.

Différentes considérations peuvent être tirées de l'étude de la fonction F_α , entre autres, celles concernant la stabilité des oscillations. Dues à sa stricte causalité ainsi qu'à la présence d'un intégrateur, les conditions initiales et finales de F_α sont :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} F_\alpha(j\omega) = -j\infty \quad (4.28)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} F_\alpha(j\omega) = 0 \quad (4.29)$$

Des exemples typiques de cette fonction sont représentés en figure 4.6. De par sa configuration, s'il existe, le premier point d'intersection entre F_α et le lieu critique correspond nécessairement à un cycle limite stable. Ce dernier se manifestera alors s'il constitue l'unique solution stable du système. Si ce n'est pas le cas, il peut apparaître, ou non, selon les conditions initiales du système.

La présence d'autres états stables dans le système est envisagée ici. Considérons tout d'abord la figure 4.5. Lorsque $\alpha > M_s$, il ne peut exister d'inter-

sections entre la courbe de Nyquist de la boucle et le lieu critique. Supposons que α soit alors diminué progressivement. Dès que la condition $\alpha < M_s$ est remplie, deux intersections existent entre les courbes. Si α est continuellement réduit, à partir d'un certain moment, où le point $L(j\omega_u)$ responsable de la marge de gain se trouve sur le lieu critique, une seule intersection est présente. α vaut alors :

$$\frac{M_g}{M_g - 1} \quad (4.30)$$

Ces mêmes situations sont considérées en figure 4.7, dans deux diagrammes de Nyquist de la fonction $F_\alpha(j\omega)$. La figure 4.7 a) correspond à l'état où :

$$M_s > \alpha_3 > \frac{M_g}{M_g - 1} \quad (4.31)$$

Deux intersections notées par a et b , existent ainsi entre $F_{\alpha_3}(j\omega)$ et l'axe réel négatif. Dès lors, si la pente de la saturation est choisie, telle que :

$$-\frac{1}{k} > a \quad (4.32)$$

une intersection au minimum, correspondant au point a , est présente entre le lieu critique $(-\infty, -1/k]$ et $F_{\alpha_3}(j\omega)$. Deux situations peuvent alors survenir :

1. Le point $-1/k$ se situe entre a et b . Plus exactement :

$$a < -\frac{1}{k} < b \quad (4.33)$$

Dans cette éventualité, le cycle limite est la seule solution du système considéré.

2. Le point $-1/k$ se situe entre b et 0 :

$$b \leq -\frac{1}{k} \leq 0 \quad (4.34)$$

Dans cette circonstance, un cycle limite correspondant au point a existe, mais n'est pas la seule solution du système. Dans le but de démontrer cette affirmation, considérons le système de la figure 4.3 au repos. Dans cette situation, la valeur de la sortie aussi bien que celle des variables internes est nulle. La stabilité de cet état est considérée ici. Pour ce faire, imaginons une perturbation infinitésimale du point

d'équilibre. Comme les signaux sont d'amplitudes faibles, la sortie de la non-linéarité n'est pas saturée et le système global est linéaire. Ainsi la stabilité peut être montrée à l'aide de l'outil classique qu'est le critère de Nyquist. La fonction de transfert de la boucle considérée est :

$$kF_\alpha(s) = k \frac{1}{s} \frac{\alpha(L(s) + 1) - 1}{\alpha(L(s) + 1) + 1} \quad (4.35)$$

Cette fonction n'a pas de pôles strictement instables, car les pôles de $sF_\alpha(s)$ sont ceux du système décrit en équation (4.10) et supposé stable. Ainsi, le système linéaire en boucle fermée est stable, si et seulement si, $F_\alpha(j\omega)$ n'encercle pas le point $-1/k$. Ainsi, il peut être constaté, en considérant la figure 4.7 a), que, lorsque la condition $b \leq -1/k \leq 0$ est vérifiée, le point d'équilibre correspondant à la solution triviale est ainsi également stable.

Considérons maintenant la situation représentée en figure 4.7 b) où :

$$\alpha \leq \frac{M_g}{M_g - 1} \quad (4.36)$$

Notons que la figure dépeint cette configuration dans le cas où l'égalité est satisfaite. Un seul point d'intersection a' est présent et la seule solution du système est un cycle limite, pour autant que $a' \leq -1/k$.

Ainsi jusqu'ici, il a été démontré que le système considéré est passif dans l'hypothèse où $\alpha > M_s$. Dans le cas contraire, lorsque la pente de la saturation est choisie suffisamment grande, un cycle limite stable existe nécessairement. Il n'est cependant pas toujours l'unique solution, car la solution triviale est également, dans certaines circonstances, stable.

Procédure de mesure de la norme infinie de la fonction de sensibilité

Maintenant que la dynamique du schéma de mesure a été clarifiée, il reste à proposer une démarche pour la mesure du paramètre M_s . Le but de la procédure est de montrer comment choisir et varier les paramètres k et α de façon à identifier de manière précise M_s à l'aide d'un cycle limite.

Deux hypothèses sont tout d'abord proposées pour assurer le bon fonctionnement de la méthode :

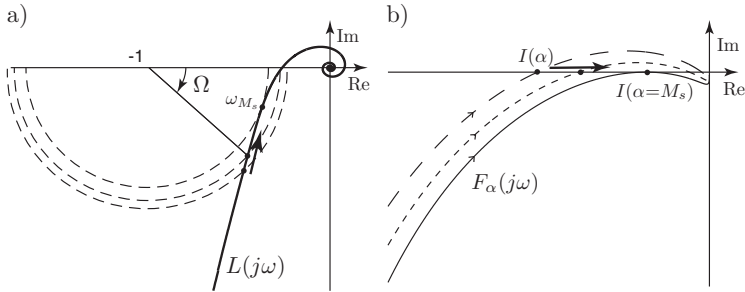


FIG. 4.8 – Illustration de la procédure de mesure.

1. Soit ω_{M_s} , la pulsation où la distance entre la réponse harmonique de la boucle et le point critique est minimale. Il est supposé que $\Im\{L(j\omega_{M_s})\} \leq 0$.
2. Soit Ω l'angle entre le point critique et $L(j\omega)$ en une pulsation ω_i , dépeint en figure 4.8 a). On présuppose alors que cet angle est une fonction décroissante de la pulsation ω aux alentours de ω_{M_s} .

Ces conditions ne sont en soi pas restrictives, puisqu'elles sont généralement vérifiées pour la grande majorité des processus, pour lesquels les régulateurs PID constituent une solution judicieuse. La première hypothèse est évidente et découle de l'équation (4.27). Si la deuxième hypothèse est remplie, alors le premier point d'intersection entre $F_\alpha(j\omega)$ et l'axe réel négatif, correspondant au cycle limite stable, se déplace en direction de l'origine lorsque la valeur du paramètre α est augmentée. Ce point d'intersection, dénommé $I(\alpha)$, est illustré en figure 4.8 b) pour différents α . Ainsi, si la condition $\alpha < M_s$ est remplie, un point $I(\alpha)$ existe. Lorsque la valeur de α est augmentée, ce point se déplace vers l'origine jusqu'à $\alpha = M_s$. À cet instant, le système oscille à la pulsation correspondant à l'amplitude maximale de la fonction de sensibilité et M_s peut être estimée. Si α prend une valeur encore supérieure, le point d'intersection I n'existe plus et l'oscillation est amortie.

Le but recherché est d'adapter α et k de sorte que le point correspondant au cycle limite soit $I(\alpha = M_s)$. De plus, comme la mesure est basée sur l'hypothèse du premier harmonique, la saturation doit générer aussi peu d'harmoniques de rang supérieur que possible. Comme il a été étudié en section 2.4.3, le niveau de saturation en sortie de l'organe non linéaire

est directement proportionnel à la distance le long de l'axe réel séparant l'intersection responsable de l'oscillation $I(\alpha)$, du point $-1/k$. L'idée sous-jacente à la procédure de mesure est de choisir d'abord le point $-1/k$, puis de varier le paramètre α de sorte à obtenir un signal quasi-sinusoidal en sortie de saturation. Ainsi la même règle que celle de l'équation (2.56) est émise pour l'adaptation du paramètre α :

$$\frac{d\alpha}{dt} = \delta|y_s(t) - u_s(t)| - \varepsilon \quad (4.37)$$

Supposons que le paramètre k soit choisi tel que :

$$-\frac{1}{k} < I(\alpha = M_s) \quad (4.38)$$

Cette configuration peut être représentée en visualisant la figure 4.8. Si α est adapté selon l'équation (4.37), le point $I(\alpha)$ va se déplacer dans les environs de $-1/k$. Si maintenant $-1/k$ est brusquement augmenté de telle manière que :

$$I(\alpha = M_s) < -\frac{1}{k} \quad (4.39)$$

la valeur de α va croître jusqu'à atteindre $\alpha = M_s$ de façon à amener $I(\alpha)$ dans les environs de $-1/k$. Si α est encore augmenté, le cycle limite est amorti, car le schéma devient passif. La valeur de α va, par conséquent, être ramenée à des amplitudes plus faibles en accord avec l'équation (4.37). α va donc ainsi rester dans le voisinage de M_s . La procédure de mesure peut maintenant être explicitée de la manière suivante :

1. Choisir k et α de sorte qu'un cycle limite se manifeste. Cela peut être obtenu en sélectionnant une grande pente k afin que la saturation ait un comportement proche d'un relais et en réduisant progressivement α . Lorsque :

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{M_g}{M_g - 1} \quad (4.40)$$

une oscillation apparaît. Pour la plupart des systèmes, cette valeur est juste légèrement inférieure à M_s .

2. Choisir $-1/k$ égal à $I(\alpha_0)$ et adapter α selon l'équation (4.37).
3. Augmenter itérativement k selon la règle :

$$k_{r+1} = pk_r \quad (4.41)$$

où r désigne l'itération et $p > 1$ un nombre réel. $p = 1.2$ a été choisi dans les exemples présentés ultérieurement et peut être donné à titre indicatif. À chaque augmentation de k , α va subséquemment croître et amener $I(\alpha)$ dans les environs de $-1/k$. Lorsque $-1/k$ devient plus grand que M_s , la valeur de α n'augmente plus en fonction de k et doit rester dans le voisinage de M_s . Ainsi, lors de chaque itération, après dissipation du régime transitoire, la valeur du paramètre α est enregistrée. Si un accroissement de k ne produit pas un changement de la valeur α , cela signifie que α est proche de M_s et que la procédure peut être stoppée.

La norme infinie de la fonction de sensibilité, la fréquence associée, ainsi que le point correspondant de la réponse harmonique de la boucle peuvent alors être mesurés à l'aide du cycle limite obtenu.

4.2.4 Mesure de la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire

La même approche que celle utilisée dans la section précédente est mise en œuvre pour déterminer la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire M_t . Le schéma de mesure est décrit en figure 4.9, où, de manière similaire, la pente de la saturation k est un nombre réel positif et $\beta > 1$. Une fois de plus, la condition nécessaire pour l'existence d'un cycle limite est donnée par la méthode du premier harmonique :

$$\frac{1}{j\omega} \frac{\beta(L(j\omega) + 1) + L(j\omega)}{\beta(L(j\omega) + 1) - L(j\omega)} = -\frac{1}{N_s(A)} \quad (4.42)$$

De simples calculs algébriques mènent à la condition suivante :

$$\frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} = \beta \frac{\frac{j\omega}{N_s(A)} + 1}{\frac{j\omega}{N_s(A)} - 1} \quad (4.43)$$

Le terme de droite de l'équation précédente, ayant un module dont la valeur est celle de β , témoigne que le schéma proposé est apte à générer un régime oscillatoire permanent en une pulsation où $|T(j\omega)| = \beta$. Lorsque β est supérieur à M_t , une démonstration de passivité, identique à celle réalisée en section 4.2.3 peut être réalisée. Pour éviter toute redondance, la procédure

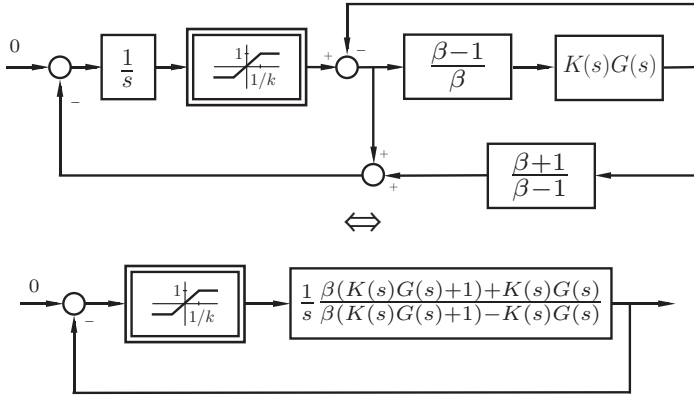


FIG. 4.9 – Schéma permettant de mesurer la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire.

de mesure qui est la même que celle proposée dans la section précédente, n'est pas répétée ici.

Remarque 4.1 : La méthode n'est cependant pas applicable lorsque $M_t < 1$. De telles valeurs de β entraînent une instabilité du système. Il est cependant à remarquer que ces valeurs ne sont pas envisageables en présence d'un intégrateur dans la boucle. Ce dernier amène automatiquement la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire dans une plage appropriée. Notons enfin qu'un intégrateur est fortement désiré en pratique dans le but d'éliminer le statisme.

4.3 Critère fréquentiel

Maintenant que la mesure des marges de robustesse et des pulsations associées ont été considérées, il reste, in fine, à détailler la procédure d'ajustement. Le problème est formulé comme une optimisation sans contrainte, le but étant de trouver les paramètres d'un régulateur minimisant un critère fréquentiel J . Ce dernier est défini comme la somme pondérée des erreurs

au carré entre les valeurs des paramètres de synthèse mesurées et spécifiées :

$$J(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i (P_i(\boldsymbol{\rho}) - P_i^*)^2 \quad (4.44)$$

où $\boldsymbol{\rho}$ est le vecteur des paramètres du régulateur de dimension n_p (typiquement $\boldsymbol{\rho} = [K_p, T_i, T_d]^T$ pour la structure standard du régulateur PID), n_p , le nombre de paramètres de synthèse utilisés ; $P_i(\boldsymbol{\rho})$ indique la valeur mesurée du $i^{\text{ème}}$ paramètre de synthèse qui dépend du régulateur considéré et P_i^* , sa valeur spécifiée. λ_i est un facteur de pondération, usuellement choisi comme indiqué ci-après, de façon à normaliser les termes dans le critère :

$$\lambda_i = \frac{1}{P_i^*} \quad (4.45)$$

Notons ici que chaque paramètre de synthèse introduit en section 2.3.6 peut être choisi pour figurer dans le critère fréquentiel lors de la procédure d'ajustement.

Remarque 4.2 : Dans le but de simplifier par la suite le calcul des dérivées, au lieu de prendre en compte directement la marge de gain comme paramètre de synthèse, son inverse est considéré lors de la procédure :

$$K_u = |L(j\omega_u)| = \frac{1}{M_g} \quad (4.46)$$

De manière similaire, en lieu et place de M_s , la considération de l'inverse de la norme infinie de la fonction de sensibilité M_s , communément appelé marge de module M_m , facilite l'écriture par la suite :

$$M_m = \frac{1}{M_s} = \frac{1}{\|S\|_\infty} \quad (4.47)$$

4.4 Solution itérative

Une méthode de type gradient connue sous le nom de méthode de Newton [20, 47, 56] est utilisée afin d'obtenir itérativement les paramètres du régulateur minimisant le critère fréquentiel. La solution est formulée de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\rho}_{m+1} = \boldsymbol{\rho}_m - \gamma_m \mathbf{F}^{-1} J'(\boldsymbol{\rho}_m) \quad (4.48)$$

où m désigne l'itération ; γ_m le pas correspondant (souvent choisi égal à l'unité) ; \mathbf{F} une matrice carrée, définie positive, de dimension n_p . Et $J'(\boldsymbol{\rho})$ représente le gradient du critère par rapport à $\boldsymbol{\rho}$. \mathbf{F} peut être sélectionné comme étant la matrice identité \mathbf{I} ou encore comme le Hessien afin d'améliorer de façon significative la vitesse de convergence. Ce dernier choix sera fait par la suite. La procédure itérative est alors appelée méthode de Gauss-Newton.

Le gradient du critère est donné par :

$$J'(\boldsymbol{\rho}) = \frac{dJ(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} = \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i (P_i(\boldsymbol{\rho}) - P_i^*) \frac{dP_i(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \quad (4.49)$$

et le Hessien \mathbf{H} par :

$$\mathbf{F} = \mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \frac{dP_i(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \frac{dP_i(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}}^T + \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i (P_i(\boldsymbol{\rho}) - P_i^*) \frac{d^2 P_i(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}^2} \quad (4.50)$$

Dans l'équation précédente, les termes de la partie de droite, contenant des dérivées de second ordre, peuvent être négligés, car leurs valeurs sont petites dans le voisinage de l'optimum. De plus, cette opération simplifie grandement le calcul du Hessien, qui peut maintenant être estimé sans aucune information additionnelle, vu que les termes restants sont aussi présents dans le gradient. Ainsi :

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\rho}) \approx \sum_{i=1}^{n_p} \lambda_i \frac{dP_i(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \frac{dP_i(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}}^T \quad (4.51)$$

Remarque 4.3 : Le rang d'une matrice définie par la multiplication d'un vecteur par sa transposée est unitaire. Il s'ensuit que celui de l'approximation du Hessien de l'équation (4.51) est inférieur ou égal au nombre de paramètres de synthèse n_p . Si le nombre de paramètres du régulateur n_p , qui est égal à la dimension de \mathbf{H} , est strictement supérieur à n_p , le Hessien devient singulier et son inverse n'est pas défini. Dans ce cas, pour remédier au problème, deux solutions peuvent être envisagées :

1. Réduire le nombre de paramètres du régulateur considéré pour la synthèse. Cela peut être réalisé, par exemple, en fixant le rapport entre la constante d'intégration et celle de dérivation $T_i = \gamma T_d$ (cf. chapitre 3).

2. Considérer une légère modification du Hessian [20] : $\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \varepsilon \mathbf{I}$, où ε est un petit nombre réel positif. La matrice $\tilde{\mathbf{H}}$ définie positive et inversible remplit alors les conditions pour être utilisée lors de la résolution itérative.

Remarque 4.4 : Lorsque la dimension n_p du vecteur des paramètres du régulateur est égale au nombre des paramètres de synthèse, les facteurs de pondération n'ont aucune influence sur la solution obtenue et un algorithme simplifié de minimisation est obtenu.

Pour démontrer ces affirmations, le critère fréquentiel de l'équation (4.44) est exprimé de la manière suivante :

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}) \quad (4.52)$$

où $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho})$ est le vecteur de dimension n_p des différences entre les valeurs mesurées et désirées des paramètres de synthèse et $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_p}\}$:

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}) = \begin{pmatrix} P_1(\boldsymbol{\rho}) - P_1^* \\ P_2(\boldsymbol{\rho}) - P_2^* \\ \vdots \\ P_n(\boldsymbol{\rho}) - P_n^* \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n_p} \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Le gradient du critère peut alors être réécrit comme suit :

$$J' = \frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}) + \left(\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\rho}) \mathbf{\Lambda} \frac{d\mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \right)^T \right) \quad (4.54)$$

$$= \frac{d\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}) \quad (4.55)$$

L'approximation du Hessian peut également être reformulée :

$$\mathbf{H} \approx \frac{d\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \mathbf{\Lambda} \frac{d\mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \quad (4.56)$$

En insérant les équations (4.55) et (4.56) en (4.48), la solution itérative

devient alors :

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\rho}_{m+1} &= \boldsymbol{\rho}_m - \gamma_m \mathbf{H}^{-1} J'(\boldsymbol{\rho}_m) \\
 &= \boldsymbol{\rho}_m - \gamma_m \left(\frac{d\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\Lambda} \frac{d\mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \right)^{-1} \frac{d\mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}) \\
 &= \boldsymbol{\rho}_m - \gamma_m \left(\frac{d\mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} \right)^{-1} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho})
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

L'équation (4.57) est bien connue pour être la solution itérative de la méthode de Newton-Raphson destinée à résoudre numériquement le système d'équations $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho}) = 0$. L'implantation de cet algorithme s'en retrouve simplifiée. Les dérivées de $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho})$ par rapport au vecteur $\boldsymbol{\rho}$ peuvent être calculées comme suit :

$$\frac{d\mathbf{Q}(\boldsymbol{\rho})}{d\boldsymbol{\rho}} = \begin{pmatrix} \frac{dP_1(\boldsymbol{\rho})^T}{d\boldsymbol{\rho}} \\ \vdots \\ \frac{dP_{n_p}(\boldsymbol{\rho})^T}{d\boldsymbol{\rho}} \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

Quelques remarques plus générales sur la méthode d'ajustement s'imposent également maintenant :

Remarque 4.5 : La procédure d'ajustement est, comme beaucoup de méthodes de synthèse numérique ayant trait aux PID, non convexe. Il n'y a ainsi aucune garantie de convergence vers une solution minimisant le critère fréquentiel. Le choix du régulateur initial joue, par conséquent, un rôle très important. Les propriétés qui lui sont relatives ne doivent pas être trop éloignées de celles recherchées. En choisissant une commande initiale appropriée, comme, par exemple, en utilisant la méthode de $\kappa - \tau$ [7] ou celle présentée lors du chapitre précédent, l'algorithme proposé converge habituellement, en quelques itérations, vers le minimum du critère.

Remarque 4.6 : Le problème d'optimisation est formulé sans contraintes. En réalité cependant, des contraintes sont présentes. Il n'est, par exemple, pas désiré d'obtenir des valeurs négatives pour les paramètres du régulateur. En considérant la formulation standard du PID, la région de faisabilité peut ainsi être définie comme le lieu où les trois

contraintes suivantes sont satisfaites :

$$K_p > 0 \quad T_i > 0 \quad T_d > 0 \quad (4.59)$$

Une manière aisée d'en tenir compte lors de la synthèse est de projeter le gradient sur la région de faisabilité, si une contrainte est violée. Cette technique est couramment utilisée par des méthodes numériques, comme celle du point intérieur² [56].

4.5 Calcul des dérivées

Afin de résoudre le problème d'optimisation, il reste maintenant à montrer comment le calcul des dérivées des paramètres de synthèse, intervenant dans le gradient et le Hessien, est réalisé.

4.5.1 Dérivée de la pulsation de croisement

Afin de calculer la dérivée de la pulsation de croisement, sa définition est utilisée :

$$|L(j\omega_c)| \equiv 1 \quad (4.60)$$

La dérivée totale de ce terme, pouvant être exprimée sous forme de dérivées partielles, est donc nulle :

$$\frac{d|L(j\omega_c)|}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial|L(j\omega_c)|}{\partial\boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial|L(j\omega)|}{\partial\omega} \bigg|_{\omega_c} \frac{\partial\omega_c}{\partial\boldsymbol{\rho}} = 0 \quad (4.61)$$

Le premier terme de l'équation susmentionnée peut être écrit comme :

$$\frac{\partial|L(j\omega_c)|}{\partial\boldsymbol{\rho}} = |G(j\omega_c)| \frac{\partial|K(j\omega_c)|}{\partial\boldsymbol{\rho}} \quad (4.62)$$

Ainsi :

$$\frac{d\omega_c}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial\omega_c}{\partial\boldsymbol{\rho}} = -|G(j\omega_c)| \frac{\partial|K(j\omega_c)|}{\partial\boldsymbol{\rho}} \left(\frac{\partial|L(j\omega)|}{\partial\omega} \bigg|_{\omega_c} \right)^{-1} \quad (4.63)$$

²de l'anglais : *interior point method*

L'équation précédente contient une dérivée de la réponse harmonique de la boucle, qui peut être estimée comme suit, grâce à la relation offerte en (3.26), obtenue à l'aide de la première intégrale de Bode :

$$\left. \frac{\partial |L(j\omega)|}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} \approx \frac{2}{\pi \omega_c} (\Phi_m - \pi) |L(j\omega_c)| \quad (4.64)$$

En insérant cette dernière équation en (4.63), on obtient finalement :

$$\frac{d\omega_c}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \omega_c}{\partial \boldsymbol{\rho}} \approx -\frac{\pi \omega_c}{2(\Phi_m - \pi)} \frac{\partial \ln |K(j\omega_c)|}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.65)$$

La dérivée restante dans cette dernière équation peut être réalisée de manière analytique, car la fonction de transfert du régulateur est connue. Ainsi, en ne mesurant que la marge de phase et la pulsation de croisement, la dérivée de cette dernière peut être estimée sans aucun modèle du système à commander.

4.5.2 Dérivée de la marge de phase

Selon sa définition, la marge de phase est une fonction des paramètres du régulateur ainsi que de la pulsation critique, alors même que cette dernière est une fonction de $\boldsymbol{\rho}$:

$$\Phi_m = \Phi_m(\boldsymbol{\rho}, \omega_c(\boldsymbol{\rho})) \quad (4.66)$$

Ainsi, la dérivée de la marge de phase peut être exprimée à l'aide des dérivées partielles :

$$\frac{d\Phi_m}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \Phi_m}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \left. \frac{\partial \Phi_m}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} \frac{\partial \omega_c}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.67)$$

En remplaçant Φ_m par $\pi + \angle L(j\omega_c)$ on obtient :

$$\frac{d\Phi_m}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \angle L(j\omega_c)}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \left. \frac{\partial \angle L(j\omega_c)}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} \frac{\partial \omega_c}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.68)$$

Le premier terme de l'équation susmentionnée peut être écrit comme suit :

$$\frac{\partial \angle L(j\omega_c)}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \angle K(j\omega_c)}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.69)$$

De plus :

$$\left. \frac{\partial \angle L(j\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} = \left. \frac{\partial \angle K(j\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} + \left. \frac{\partial \angle G(j\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} \quad (4.70)$$

Finalement, la dérivée de la marge de phase s'écrit :

$$\frac{d\Phi_m}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \angle K(j\omega_c)}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \left(\left. \frac{\partial \angle K(j\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} + \left. \frac{\partial \angle G(j\omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega_c} \right) \frac{\partial \omega_c}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.71)$$

À nouveau, toutes les dérivées relatives à la réponse harmonique du régulateur peuvent être effectuées de manière analytique. La dérivée de l'argument du processus peut, quant à elle, être estimée grâce à la relation (3.28) obtenue par la deuxième intégrale de Bode.

$$\left. \frac{d\angle G(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega_c} \approx \frac{1}{\omega_c} \angle G(j\omega_c) + \frac{2}{\pi\omega_c} [\ln |G(j0)| - \ln |G(j\omega_c)|]$$

Ainsi, toutes les expressions relatives au calcul de la dérivée de la marge de phase peuvent à nouveau être évaluées sans modèle du système à commander.

4.5.3 Dérivée de la marge de gain

La dérivée de K_u qui, comme définie précédemment, est simplement l'inverse de la marge de gain, peut être exprimée de la manière suivante :

$$\frac{dK_u}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial |L(j\omega_u)|}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \left. \frac{\partial |L(j\omega_u)|}{\partial \omega} \right|_{\omega_u} \frac{\partial \omega_u}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.72)$$

Les deux premiers termes contenant des dérivées partielles peuvent s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial |L(j\omega_u)|}{\partial \boldsymbol{\rho}} = |G(j\omega_u)| \frac{\partial |K(j\omega_u)|}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.73)$$

$$\left. \frac{\partial |L(j\omega_u)|}{\partial \omega} \right|_{\omega_u} = G(j\omega_u) \left. \frac{\partial |K(j\omega_u)|}{\partial \omega} \right|_{\omega_u} + K(j\omega_u) \left. \frac{\partial |G(j\omega_u)|}{\partial \omega} \right|_{\omega_u} \quad (4.74)$$

À nouveau, toutes les dérivées relatives au régulateur peuvent être calculées de manière analytique. Le terme restant peut être estimé grâce à la relation découlant de la première intégrale de Bode (cf. équation (3.26)) :

$$\left. \frac{d|G(j\omega)|}{d\omega} \right|_{\omega_u} \approx \frac{2}{\pi\omega_u} \angle G(j\omega_u) |G(j\omega_u)| \quad (4.75)$$

La valeur de la dérivée $\partial\omega_u/\partial\rho$ est établie en utilisant la définition de la pulsation critique :

$$\angle L(j\omega_u) \equiv -\pi \quad (4.76)$$

Ainsi :

$$\frac{d\angle L(j\omega_u)}{d\rho} = \frac{\partial\angle L(j\omega_u)}{\partial\rho} + \frac{\partial\angle L(j\omega)}{\partial\omega} \Big|_{\omega_u} \frac{\partial\omega_u}{\partial\rho} = 0 \quad (4.77)$$

Le premier terme est simplifié de la sorte :

$$\frac{\partial\angle L(j\omega_u)}{\partial\rho} = \frac{\partial\angle K(j\omega_u)}{\partial\rho} \quad (4.78)$$

et le second est reformulé comme suit :

$$\frac{\partial\angle L(j\omega)}{\partial\omega} \Big|_{\omega_u} = \frac{\partial\angle K(j\omega)}{\partial\omega} \Big|_{\omega_u} + \frac{\partial\angle G(j\omega)}{\partial\omega} \Big|_{\omega_u} \quad (4.79)$$

Le terme $\partial\omega_u/\partial\rho$ est donc finalement donné par :

$$\frac{\partial\omega_u}{\partial\rho} = - \left(\frac{\partial\angle K(j\omega)}{\partial\omega} \Big|_{\omega_u} + \frac{\partial\angle G(j\omega)}{\partial\omega} \Big|_{\omega_u} \right)^{-1} \frac{\partial\angle K(j\omega_u)}{\partial\rho} \quad (4.80)$$

Une fois encore, la seule dérivée ne pouvant être effectuée de manière analytique peut être obtenue grâce à la relation (3.28), découlant de la deuxième intégrale de Bode.

$$\frac{d\angle G(j\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega_u} \approx \frac{1}{\omega_u} \angle G(j\omega_u) + \frac{2}{\pi\omega_u} [\ln |G(j0)| - \ln |G(j\omega_u)|]$$

4.5.4 Dérivée de la norme infinie de la fonction de sensibilité

La dérivée de la marge de module M_m , qui n'est autre que l'inverse de la norme infinie de la fonction de sensibilité peut s'écrire comme suit :

$$\frac{dM_m}{d\rho} = \frac{\partial M_m}{\partial\rho} + \frac{\partial M_m}{\partial\omega} \Big|_{\omega_{M_m}} \frac{\partial\omega_{M_s}}{\partial\rho} \quad (4.81)$$

où, pour rappel, ω_{M_s} est la pulsation associée à la marge. Le premier terme de l'équation peut être calculé analytiquement et vaut :

$$\frac{\partial M_m}{\partial\rho} = \frac{\partial |1 + L(j\omega_{M_s})|}{\partial\rho} \quad (4.82)$$

Le deuxième terme est formulé de la façon suivante :

$$\left. \frac{\partial M_m}{\partial \omega} \right|_{\omega_{M_s}} = \left. \frac{\partial |1 + L(j\omega)|}{\partial \omega} \right|_{\omega_{M_s}} \quad (4.83)$$

Comme la fonction $|1 + L(j\omega)|$ ainsi que sa première dérivée sont continues, un résultat évident, mais très intéressant, en découle : la dérivée décrite ci-après est nulle, car elle est effectuée à l'endroit qui correspond à l'extremum de la fonction :

$$\left. \frac{\partial M_m}{\partial \omega} \right|_{\omega_{M_s}} = 0 \quad (4.84)$$

Par conséquent :

$$\frac{dM_m}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial |1 + L(j\omega_{M_s})|}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.85)$$

Comme toutes les dérivées relatives aux paramètres du régulateur peuvent être obtenues analytiquement, celle de l'équation (4.85) peut l'être de manière exacte. Ainsi, par la seule mesure du paramètre de synthèse M_s , de la pulsation associée, ainsi que du point correspondant de la réponse harmonique du système à commander, la dérivée de l'équation (4.85) peut être calculée, et cela sans recourir aux dérivées de $G(j\omega)$.

4.5.5 Dérivée de la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire

La dérivée de M_t peut être écrite :

$$\frac{dM_t}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial M_t}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \left| \frac{L(j\omega_{M_t})}{1 + L(j\omega_{M_t})} \right|}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (4.86)$$

où ω_{M_t} est la pulsation où l'amplitude de la fonction de sensibilité complémentaire est maximale. La démarche aboutissant à cette formule est la même que celle faite en section 4.5.4. Elle n'est, par conséquent, volontairement pas mentionnée ici. Cette dérivée peut aussi être calculée analytiquement sans nécessiter celles du système à commander.

4.6 Extension aux systèmes instables ou à non-minimum de phase

Le calcul des dérivées de la pulsation de croisement ainsi que des marges de phase et de gain requièrent, comme étudié en section 4.5, la connaissance des dérivées du système à commander. Les intégrales de Bode sont alors exploitées pour l'estimation de ces valeurs. Ces relations se fondent sur l'hypothèse que le système à commander est stable à minimum de phase. Cette supposition n'a pas besoin d'être vérifiée au sens strict. Comme il l'a été montré en section 3.4.3, la présence d'un retard pur, qui implique une phase non-minimale, ne provoque pas de dégradation de la précision pour l'estimation de la pente de la phase, et altère de manière peu significative celle de l'amplitude, lorsque le retard est petit par rapport à la constante dominante du système. D'autre part, le gradient du critère n'a, en pratique, pas besoin d'être estimé de manière extrêmement précise. Plus que son exactitude, c'est la direction vers laquelle il pointe qui est importante : celle-ci doit correspondre à des valeurs croissantes du critère. Le succès des méthodes de «quasi-Newton» [56] où le gradient et le Hessien ne sont pas mis à jour lors de chaque itération, dans le but d'économiser de la puissance de calcul, témoigne de la pertinence de ces propos.

Pour certains systèmes dominés par un comportement instable ou à non-minimum de phase, les intégrales de Bode livrent cependant des valeurs erronées, si bien que le gradient qui en découle ne peut être utilisé pour l'ajustement. Une portée plus générale est donnée à la méthode dans cette section en considérant l'ajustement de régulateurs pour de tels processus. Il convient de noter ici que seules les dérivées ayant trait aux marges de phase et de gain font appel aux intégrales de Bode. Ainsi, l'extension proposée ne considère que l'ajustement de ces marges. Seule une étude succincte est toutefois livrée ici, le lecteur intéressé est renvoyé vers la publication [26] référencée en bibliographie pour des informations plus détaillées.

L'idée principale de la démarche proposée consiste à obtenir un modèle non-paramétrique de la réponse harmonique de la boucle dans une plage fréquentielle englobant les pulsations de croisement et critique. Les marges de robustesse considérées ainsi que les pentes nécessaires au calcul du gradient sont ensuite obtenues par interpolation à partir des différents points

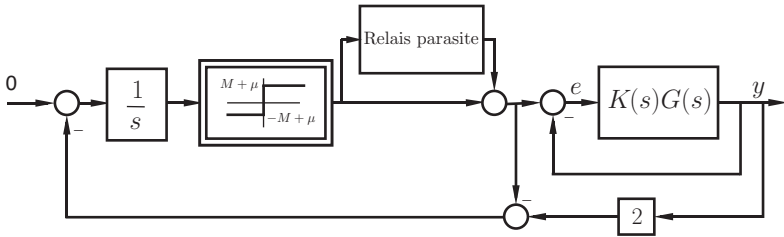


FIG. 4.10 – Test du relais modifié pour la mesure d'un modèle non-paramétrique.

du modèle non-paramétrique.

L'identification du modèle non-paramétrique est réalisée par un test du relais dérivé de l'expérience présentée en figure 4.2, et utilisée pour la mesure de la marge de phase. Ce schéma possède deux propriétés intéressantes :

1. La fréquence du premier harmonique du relais se trouve automatiquement proche de la pulsation de croisement.
2. Le degré relatif de la fonction de transfert vue par le relais est unitaire. Ainsi les harmoniques de rang supérieur impairs, mal filtrés, peuvent être utilisés pour l'identification non-paramétrique.

Afin d'ajouter encore une excitation à d'autres fréquences d'intérêt, différentes modifications sont apportées à la structure. Le schéma de mesure modifié est représenté en figure 4.10. Le premier changement consiste à remplacer le relais symétrique par un relais décentré [36]. Ce dernier est simplement obtenu en ajoutant une valeur constante μ à la sortie du relais symétrique, en veillant à choisir cette valeur de sorte que $\mu < M$. Cette simple modification permet de rajouter les harmoniques de rang supérieur pairs $0, 2\omega_0, \dots$ à la sortie du relais, où ω_0 décrit l'harmonique fondamental.

Le second changement consiste en la superposition d'un relais parasite au relais standard. Le relais parasite a été défini en [36, 62]. Il est conçu de telle sorte que la fréquence de son harmonique fondamental vaille la moitié de celle du relais standard. La sortie du relais parasite change de signe sur chaque flanc montant du signal en son entrée. L'amplitude du signal doit généralement être choisie dans l'intervalle $[0.1M; 0.3M]$ de façon à stimuler suffisamment le processus d'une part, et à ne pas modifier, d'autre part, la période du cycle limite engendré par le relais principal.

Le schéma de mesure résultant des modifications apportées, entraîne une excitation aux fréquences $0, \omega_0/2, \omega_0, 3\omega_0/2, \dots$, où ω_0 se situe proche de la pulsation de croisement. Un modèle non-paramétrique de la boucle aux pulsations considérées peut finalement être obtenu de la manière suivante :

$$L(j\omega_i) = \frac{\int_0^{\frac{4\pi}{\omega_0}} y(t)e^{-j\omega_i t} dt}{\int_0^{\frac{4\pi}{\omega_0}} e(t)e^{-j\omega_i t} dt}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.87)$$

où :

$$\omega_i = (i - 1) \frac{\omega_0}{2} \quad (4.88)$$

En pratique, comme les signaux $e(t)$ et $y(t)$ sont acquis de manière échantillonnée, le calcul de $L(j\omega_i)$ se fait par une analyse spectrale discrète [51].

Les marges de phase et de gain, ainsi que les pentes de l'amplitude et de la phase dans le diagramme de Bode, qui sont requises pour le calcul du critère, du gradient et du Hessian, sont alors obtenues par interpolations à partir du modèle non-paramétrique. Comme l'amplitude et la phase sont souvent quasi-linéaires par morceaux dans le diagramme de Bode, une interpolation linéaire est réalisée sur des échelles logarithmiques en amplitude et en pulsation. Le modèle non-paramétrique permet de déterminer des pentes moyennes entre chaque point connu. Celles-ci sont attribuées aux pulsations se trouvant au milieu des intervalles. La pente à la pulsation désirée est ensuite obtenue par interpolation linéaire.

Les différents exemples de simulation considérés en [26] montrent que d'intéressants résultats peuvent être obtenus pour les systèmes instables ou à non-minimum de phase.

4.7 Exemples de simulation

Deux exemples de simulation sont maintenant considérés pour illustrer la procédure d'ajustement présentée dans ce chapitre. Le premier cas traité considère l'ajustement des marges de phase et de gain alors que le second exemplifie l'ajustement de la norme infinie des fonctions de sensibilité. Le processus est à chaque fois supposé inconnu. Un régulateur initial est tout d'abord déterminé par la méthode expérimentale de Kappa-Tau [7]. Les

schémas de mesure introduits en section 4.2 sont alors exploités pour déterminer les marges de robustesse et la méthode d'ajustement est utilisée pour obtenir les valeurs spécifiées pour ces dernières. Les régulateurs obtenus sont enfin comparés à ceux procurés par des méthodes d'ajustement connues et reconnues par la communauté industrielle.

4.7.1 Exemple 1 : Ajustement des marges de phase et de gain

Le processus considéré dans cet exemple est décrit par la fonction de transfert de second ordre avec retard pur suivante :

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+1)^2} e^{-0.2s} \quad (4.89)$$

La structure incluant un filtre dans le terme dérivé est considérée aussi bien pour l'ajustement que lors des simulations présentées ultérieurement :

$$K(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{N s + 1} \right) \quad (4.90)$$

$N = 20$ est choisi pour tous les régulateurs considérés, exceptés ceux découlant de la méthodologie IMC [50, 57], utilisés à titre de comparaison et où cette valeur résulte de l'ajustement.

Le régulateur initial est obtenu par la méthode de Kappa-Tau [7]. Celle-ci requiert la connaissance des gains statique et critique ainsi que de la pulsation associée à ce dernier. Le gain statique est obtenu à l'aide d'une simple réponse indicielle en boucle ouverte alors que le gain critique est, quant à lui, identifié à l'aide du test standard du relais décrit en section 2.4.2. Les paramètres du régulateur résultant sont indiqués en table 4.2.

Deux expériences telles que décrites en section 4.2 sont maintenant exploitées afin d'extraire les marges de phase et de gain ainsi que la pulsation de croisement du système en boucle fermée. Ces valeurs sont également disponibles en table 4.2. De nouvelles spécifications liées aux paramètres de synthèse choisis peuvent alors être définies :

$$\begin{aligned} \text{Marge de phase :} & \quad \Phi_m^* = 60^\circ \\ \text{Marge de gain :} & \quad M_g^* = 3 \\ \text{Pulsation de croisement :} & \quad \omega_c^* = 2.5 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

TAB. 4.1 – Minimisation du critère (exemple 1).

Itération	J	K_p	T_i	T_d	Φ_m (°)	M_g	ω_c (rad/s)
0	0.474	3.39	1.32	0.323	48.5	5.63	1.56
1	0.0197	4.77	1.90	0.40	55.5	3.42	2.2
2	0.00236	4.90	2.03	0.495	58.6	2.81	2.53
3	0.000707	4.77	2.10	0.479	59.3	2.97	2.42

TAB. 4.2 – Résultats de simulation (exemple 1).

Méthode	K_p	T_i	T_d	Φ_m	M_g	ω_c	o	t_e
Ziegler-Nichols	6.41	1.01	0.252	28.6	3.34	2.37	48.5	5.7
Kappa-Tau	3.39	1.32	0.323	48.4	5.62	1.56	20.2	5.05
IMC	2.14	1.95	0.145	54.6	9.01	1.11	11.5	6.15
Proposée	4.77	2.10	0.479	59.2	2.96	2.41	6.3	2.15

La valeur actuelle du critère est calculée, et ensuite minimisée de façon itérative selon la méthode proposée. Il convient de noter ici que, lors de chaque itération, un test de stabilité peut être réalisé afin d'estimer la robustesse du nouveau régulateur avant son application. Plus précisément, un simple calcul permet de voir où les points de la réponse harmonique de la boucle, mesurés avant la mise à jour des paramètres, sont déplacés par le nouveau régulateur. Pour chaque itération, les valeurs des paramètres du régulateur, de ceux de synthèse ainsi que l'estimation du critère sont indiqués en table 4.1. Il peut être constaté, qu'en trois itérations, l'erreur relative maximale entre les spécifications et les mesures s'élève à 3.2%, ce qui signifie que la procédure d'ajustement peut être stoppée. Notons que l'erreur relative entre les valeurs exactes et les valeurs mesurées des marges de robustesse est inférieure au pour-cent lors de chaque mesure.

Les résultats obtenus sont maintenant comparés à ceux découlant des méthodes bien connues de Ziegler-Nichols, Kappa-Tau, et IMC. Pour faciliter la comparaison, les résultats sont fournis sous forme de tables et de graphiques. Les résultats de la synthèse, les valeurs exactes des paramètres considérés, ainsi que les performances temporelles en termes de temps d'établissement t_e (à 1%), et de dépassement o (en %) sont dévoilés en table 4.2. Les réponses indicielles en boucle fermée sont exposées en figure 4.11. Ces courbes montrent que le régulateur proposé améliore considérablement

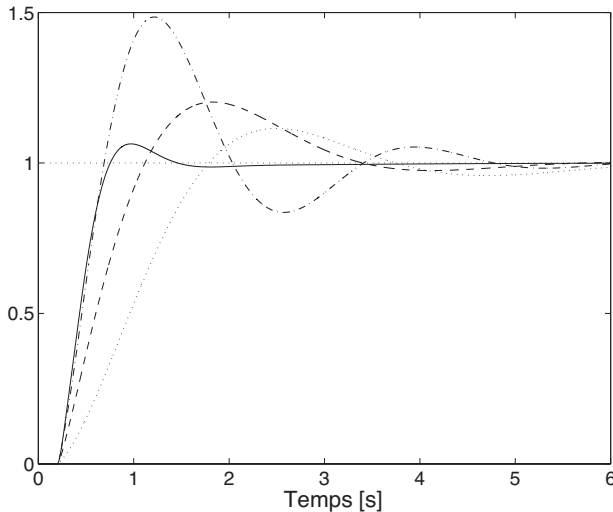


FIG. 4.11 – Réponses indicielles (- - : Ziegler-Nichols; - · - : Kappa-Tau; · · · : IMC, - : régulateur proposé).

les performances. Le dépassement ainsi que le temps d'établissement se retrouvent distinctement réduits. Les diagrammes de Nyquist relatifs aux différents régulateurs sont exposés en figure 4.12. Il peut être constaté que l'approche présentée permet de calibrer judicieusement la réponse harmonique de la boucle dans la plage de fréquences, cruciale pour la robustesse du système. Le diagramme de Nyquist de la boucle découlant de la procédure IMC possède des caractéristiques très similaires. La pulsation de croisement résultant des deux dimensionnements est cependant très différente, ce qui confère une constante de temps en boucle fermée bien plus conséquente au système contrôlé par la commande IMC.

Il convient de noter ici que, bien que l'approche présentée offre de meilleurs résultats, l'effort et le temps requis à la synthèse s'en trouvent également accrus. Pour comparaison, la méthode de Ziegler-Nichols n'exige que la connaissance du gain et de la pulsation critique, alors que l'approche Kappa-Tau requiert, en plus, la connaissance du gain statique. La procédure IMC, quant à elle, se base sur un modèle paramétrique du premier ordre avec retard pur qui peut être dérivé d'une simple réponse indicielle.

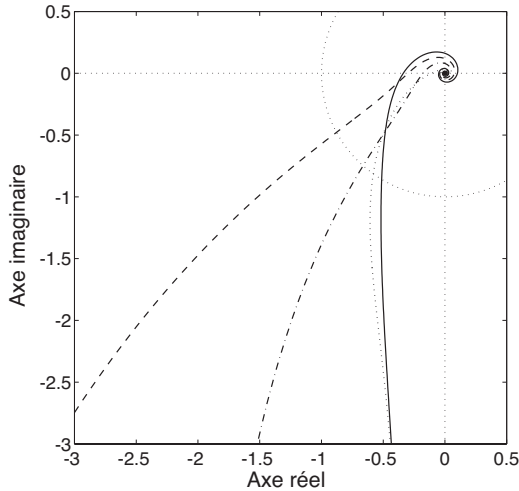


FIG. 4.12 – Diagramme de Nyquist (— : Ziegler-Nichols ; - · - : Kappa-Tau ; · · · : IMC, — : régulateur proposé).

Le paramètre λ_{IMC} qui fixe le rapport entre robustesse et bande passante doit alors être sélectionné. La règle suivante [50] très utilisée en pratique a été considérée ici :

$$\lambda_{\text{IMC}} = \max(0.25\tau, 0.2c_t) \quad (4.91)$$

où τ et c_t représentent respectivement le retard pur et la constante de temps du modèle identifié. En revanche, la méthodologie proposée requiert la mise en œuvre de deux procédures de mesure par itérations et exige ainsi également plus de temps.

4.7.2 Exemple 2 : Ajustement de la norme infinie des fonctions de sensibilité

Considérons maintenant la fonction de transfert de troisième ordre suivante :

$$G_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \quad (4.92)$$

À nouveau, un régulateur initial est dimensionné par la méthode de Kappa-Tau. La norme infinie des fonctions de sensibilité est ensuite acquise à l'aide des expériences ad hoc. Les propriétés résultant de ce régulateur sont indiquées en table 4.4. De nouvelles spécifications sont alors émises :

Fonction de sensibilité : $M_s^* = 1.40$

Fonction de sensibilité complémentaire : $M_t^* = 1.03$

Il convient de rappeler que le choix de $M_s = 1.40$ correspond à celui spécifié par la méthode de Kappa-Tau. Une valeur de $M_t = 1.03$ signifie qu'un léger dépassement est toléré lors d'une réponse indicielle. Notons que la spécification de $M_t^* = 1.00$ n'est numériquement pas souhaitable. On suppose ici qu'aucune recommandation particulière n'est requise pour la bande passante en boucle fermée ou pour le temps de montée. Ainsi, aucune valeur n'est spécifiée pour la pulsation de croisement désirée. Celle-ci est mesurée par l'expérience utilisée pour déterminer la marge de phase. Comme cette dernière ne constitue pas un paramètre de synthèse dans cet exemple, le fait de ne pas considérer de spécification sur ω_c permet de n'effectuer que deux mesures par itération. Un régulateur ne possédant que deux paramètres peut suffire pour l'obtention des valeurs désirées et garantit un Hessien défini strictement positif. Ainsi le rapport $T_i = 4T_d$, approprié pour de nombreuses applications [7], est sélectionné pour réduire le nombre de paramètres de la commande.

Le critère est ensuite minimisé itérativement en utilisant l'approche présentée dans ce chapitre. Les détails de la minimisation sont livrés en table 4.3. Les valeurs mesurées des paramètres de synthèse sont exprimées dans cette table. Il est notamment à remarquer que deux itérations suffisent pour atteindre des valeurs suffisamment proches de celles désirées. Les erreurs obtenues par les procédures de mesure sont de l'ordre de 2%. En table 4.4, une comparaison des différents régulateurs est donnée avec les valeurs exactes des normes infinies des fonctions de sensibilité.

Une comparaison dans le domaine temporel, exposée en figure 4.13, témoigne de l'amélioration des performances amenée par le régulateur proposé. Le diagramme de Nyquist de la figure 4.14, où les réponses harmoniques des boucles sont dépeintes, montre clairement les différences de robustesse. Les cercles associés aux spécifications, définissant des zones prohibées pour la courbe remplissant les exigences sur les paramètres de synthèse,

TAB. 4.3 – Minimisation du critère (exemple 2).

Itération	J	K_p	T_i	T_d	M_s	M_t
0	0.0117	19.0	1.22	0.301	1.44	1.19
1	0.00121	28.26	1.58	0.395	1.42	1.07
2	0.000035	22.8	1.50	0.376	1.39	1.03

TAB. 4.4 – Résultats de simulation (exemple 2).

Méthode	K_p	T_i	T_d	M_s	M_t	o	t_e
Ziegler-Nichols	36.0	0.947	0.237	2.21	2.0	45.2	6.0
Kappa-Tau	19.0	1.22	0.301	1.44	1.19	18.0	3.8
IMC	12.9	1.63	0.120	1.67	1.17	15.2	4.9
Proposée	22.8	1.50	0.376	1.42	1.04	10.7	2.01

y sont également indiqués. Ces dernières sont quasiment satisfaites par le régulateur proposé. Notons encore que la méthode de Kappa-Tau, également basée sur une spécification en M_s de 1.40, parvient, bien que la procédure soit empirique, à une valeur très proche.

4.8 Applications

La méthode d'ajustement a également été expérimentée sur plusieurs systèmes réels. Deux applications sont présentées ci-dessous.

4.8.1 Vases communicants

Un système de vases communicants, dont un schéma est représenté en figure 4.15, est tout d'abord considéré. Le processus est constitué de trois cylindres interconnectés en série par deux conduits dotés de vannes de liaison. Deux pompes, entraînées par des moteurs à courant continu, alimentent les vases T1 et T2 avec de l'eau collectée dans un réservoir. Le niveau de chaque cylindre est mesuré à l'aide de capteurs de pression piézo-résistifs dont les signaux sont transmis au servo-amplificateur. Le vase T1 est équipé d'une vanne de fuite ajustable manuellement, qui permet au liquide de s'écouler vers le réservoir avec un débit \dot{Q}_3 . L'entrée u du système consiste en une tension qui contrôle le débit \dot{Q}_1 d'alimentation du vase T1. La sortie y est

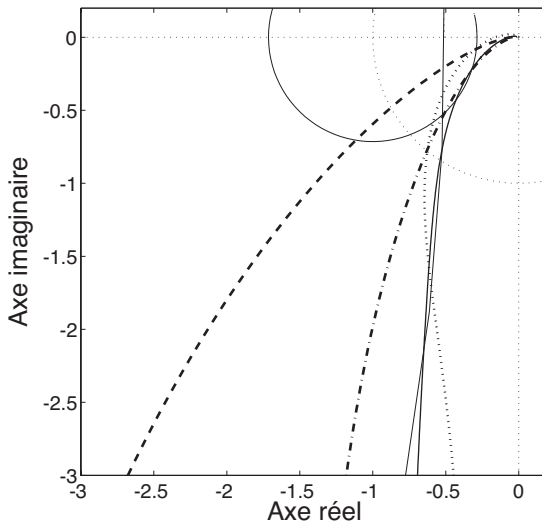


FIG. 4.13 – Diagramme de Nyquist (--- : Ziegler-Nichols; -.- : Kappa-Tau; ... : IMC, — : régulateur proposé).

le signal du capteur de pression, proportionnel au niveau du liquide dans le cylindre T2. La deuxième pompe opère comme source de perturbations. L'objectif de la commande est de maintenir le niveau du vase T3 à une hauteur H désirée.

Le point de fonctionnement considéré correspond à $\dot{Q}_1 = \dot{Q}_{1_{max}}/2$, où $\dot{Q}_{1_{max}}$ est le débit maximal que la pompe est capable de fournir. En ce point, un régulateur initial est dimensionné par la règle de Kappa-Tau. Le résultat obtenu est représenté en table 4.5. Un ajustement de la marge de phase et de la pulsation de croisement est choisi pour ce système. L'expérience de mesure présentée en section 4.2.2 est exploitée et livre les valeurs suivantes :

$$\Phi_m = 64.0^\circ \quad \omega_c = 0.097 \text{ rad/s} \quad (4.93)$$

Des spécifications sont alors émises pour accroître la robustesse du système en boucle fermée. En contrepartie, la pulsation de croisement désirée est quelque peu réduite :

$$\Phi_m^* = 80^\circ \quad \omega_c^* = 0.08 \text{ rad/s} \quad (4.94)$$

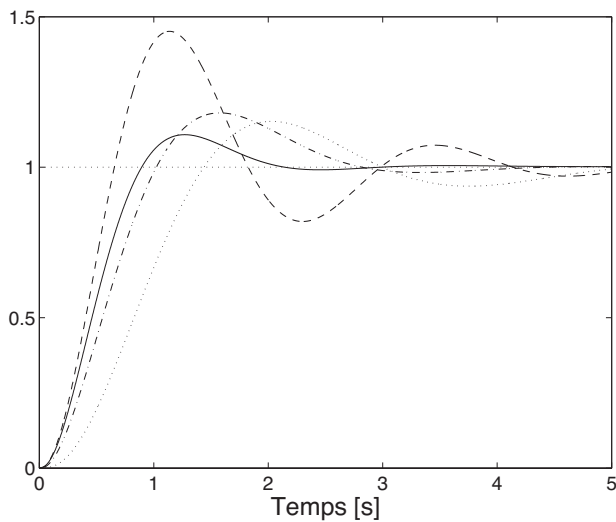


FIG. 4.14 – Réponses indicielles (- - : Ziegler-Nichols; - · - : Kappa-Tau; · · · : IMC, — : régulateur proposé).

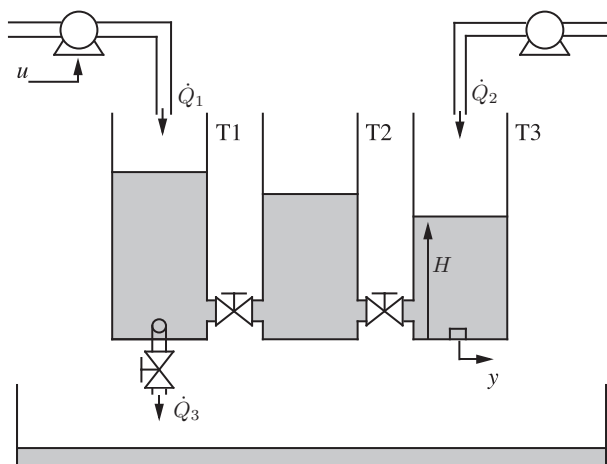


FIG. 4.15 – Schéma du système de vases communicants.

TAB. 4.5 – Résultats expérimentaux (Vases communicants).

Méthode	K_p	T_i	T_d	Φ_m	ω_c
Kappa-Tau	29.3	20.84	4.72	64.0	0.097
Proposée	20.4	31.5	7.88	86.2	0.085
Proposée (2 ^{ième} point de fonctionnement)	23.4	42.3	10.6	73.7	0.0791

De manière analogue à l'exemple mentionné dans la section précédente, comme le nombre de paramètres de synthèse n'est que de deux, les paramètres du régulateur sont également ramenés à ce même chiffre en utilisant le rapport $T_i = 4T_d$. Notons que le niveau élevé du bruit de mesure impose un filtre sur le terme dérivé plus conséquent que celui considéré précédemment. Ainsi le nombre intervenant dans le filtre est fixé à $N = 5$ pour cette application.

La méthode itérative est alors appliquée. Après une itération, les valeurs ci-après sont mesurées :

$$\Phi_m = 86.2^\circ \quad \omega_c = 0.085 \text{ rad/s} \quad (4.95)$$

Comme ces valeurs sont suffisamment proches de celles spécifiées, la procédure est stoppée. Une comparaison entre les performances temporelles des régulateurs est fournie en figure 4.16. Notons que la configuration du système considéré entraîne nombre de méthodes empiriques à un régulateur déstabilisant. C'est le cas notamment de celle de Ziegler-Nichols. La réponse indicielle est normalisée et la perturbation réside en un débit constant \dot{Q}_2 délivré par la seconde pompe à partir du temps $t = 160$ secondes. On peut constater que le régulateur proposé, dont les paramètres sont donnés en table 4.5, améliore nettement les performances du système en boucle fermée.

Supposons maintenant que le point de fonctionnement du système ait changé. Les performances se sont alors détériorées, dues à la présence de différentes non-linéarités. Ainsi le régulateur obtenu auparavant confère au système en boucle fermée des propriétés ne satisfaisant plus aux spécifications :

$$\Phi_m = 55.0^\circ \quad \omega_c = 0.066 \text{ rad/sec} \quad (4.96)$$

Un réajustement est donc nécessaire. À nouveau, après une itération, des

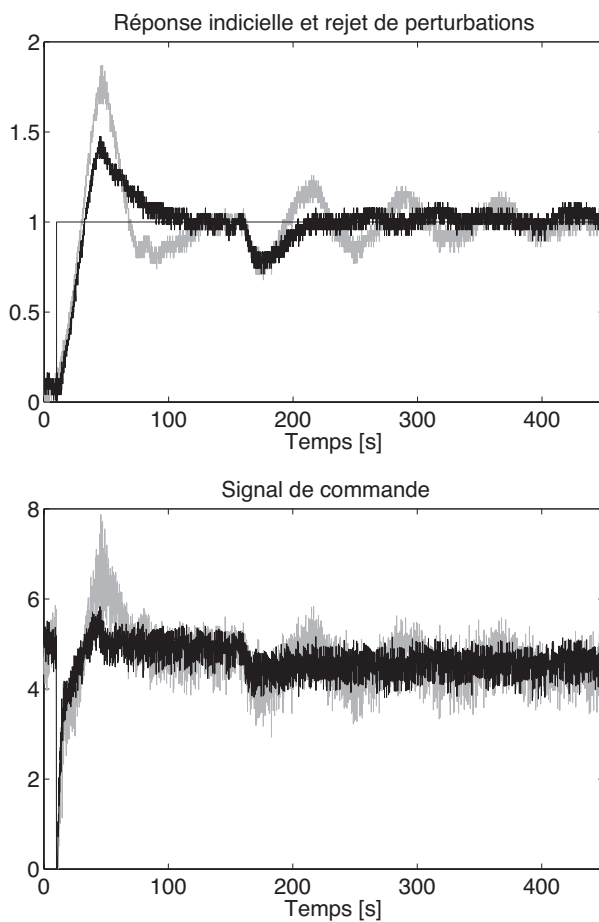


FIG. 4.16 – Réponse indicielle normalisée et rejet de perturbations du système en boucle fermée (ligne grise : Kappa-Tau ; ligne noire : régulateur proposé).

valeurs proches de celles désirées sont obtenues si bien que la procédure est arrêtée :

$$\Phi_m = 73.7^\circ \quad \omega_c = 0.0791 \text{ rad/sec} \quad (4.97)$$

Les réponses temporelles sont à nouveau comparées en figure 4.17. Cet exemple montre comment la méthode exploitée peut être utilisée de manière simple, mais efficace pour l'auto-ajustement de régulateurs. Comme un seul test de mesure est requis par itération, ce dernier peut être réalisé de manière ininterrompue. Ce fait est démontré en figure 4.18. Durant les premières 500 secondes, le régulateur initial est implanté et la mesure de marge de phase est effectuée. Le régulateur est ensuite mis à jour, et un nouveau test est exécuté. Cette illustration montre également la rapidité avec laquelle la valeur des paramètres de synthèse peut être évaluée.

4.8.2 Transmission flexible

Pour conclure cette section, des résultats obtenus avec la transmission flexible décrite en section 3.7 sont présentés. L'ajustement est, cette fois, fondé sur des spécifications de la norme infinie des fonctions de sensibilité. Comme dans la section 3.7, bien que le système ait un comportement quasi-intégrateur, une structure PID a été choisie pour l'ajustement afin de supprimer tout statisme. Beaucoup de méthodes classiques ne peuvent pas être appliquées à de tels processus. Différentes raisons peuvent être évoquées. Une première est que la commande ainsi obtenue se montre souvent déstabilisante. C'est le cas, par exemple, de la méthode de Ziegler-Nichols. D'autre part, les suppositions faites ne sont souvent pas réalistes et ne permettent pas d'utiliser certaines procédures pour le dimensionnement du régulateur. L'algorithme IMC, par exemple, qui présuppose que le système à commander est de premier ordre avec retard pur ne peut être appliqué aux systèmes contenant un intégrateur. La méthode de Kappa-Tau, par contre, permet la synthèse d'un régulateur, en présupposant un gain statique infini. Ce dernier est utilisé pour initialiser la procédure :

$$K_{KT}(s) = 2.37 \left(1 + \frac{1}{0.217s} + \frac{0.0487s}{\frac{0.0487}{20}s + 1} \right) \quad (4.98)$$

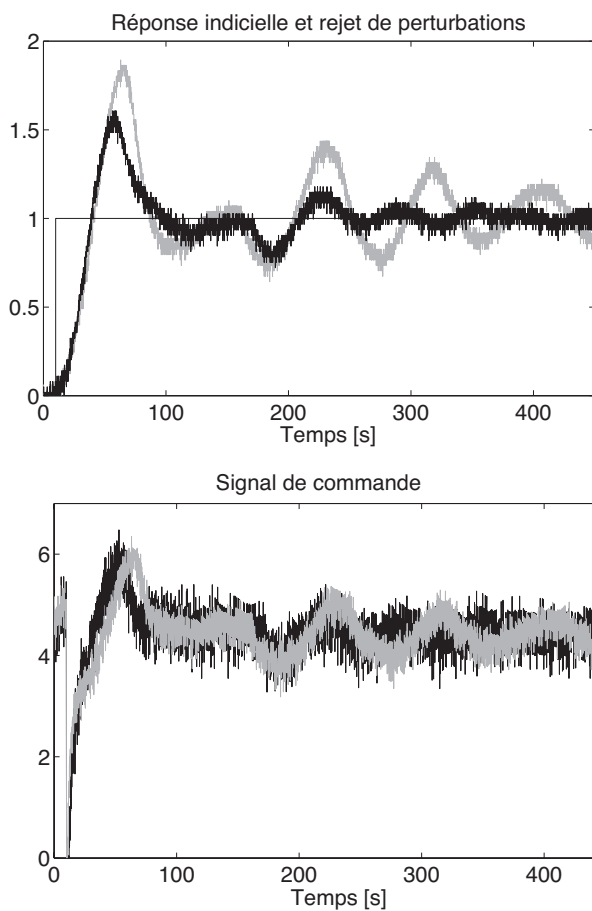


FIG. 4.17 – Réponse indicielle normalisée et rejet de perturbations du système en boucle fermée (ligne grise : régulateur initial ; ligne noire : régulateur proposé).

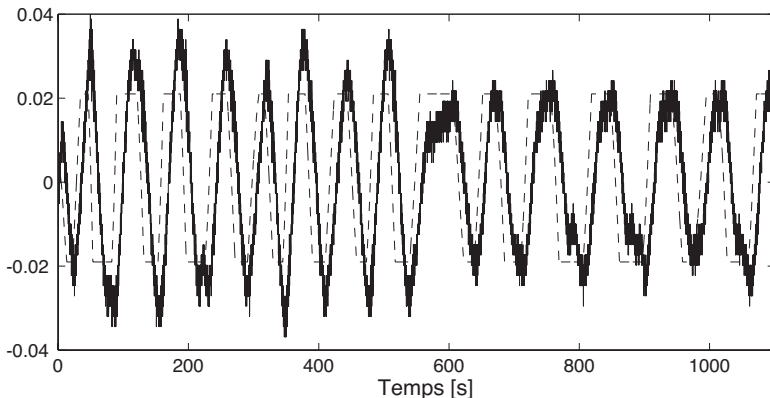


FIG. 4.18 – Expérience d’auto-ajustement (ligne traitillée : signal de référence de la boucle fermée ; ligne noire : signal de sortie du processus).

TAB. 4.6 – Résultats expérimentaux (transmission flexible).

Itération	J	K_p	T_i	T_d	M_s	M_t
0	0.104	2.37	0.217	0.0487	1.52	1.54
1	0.027	2.38	0.391	0.0252	1.50	1.31
2	0.0065	2.42	0.579	0.0233	1.47	1.19
3	0.0026	2.43	0.910	0.0188	1.47	1.12

Les valeurs de la norme infinie des fonctions de sensibilité sont alors mesurées avec les expériences proposées en section 4.2. On obtient ainsi :

$$M_s = 1.52 \quad M_t = 1.54 \quad (4.99)$$

De nouvelles spécifications sont alors proposées :

$$M_s^* = 1.40 \quad M_t^* = 1.10 \quad (4.100)$$

Notons ici que la spécification $M_t^* = 1.03$ considérée dans l’exemple de simulation qui précède n’est pas réaliste pour une boucle contenant quasiment deux intégrateurs.

Le critère proposé est alors minimisé itérativement par l’approche présentée dans ce chapitre. Le détail des résultats obtenus à chaque itération est représenté en table 4.6. Deux figures sont offertes pour illustrer la procé-

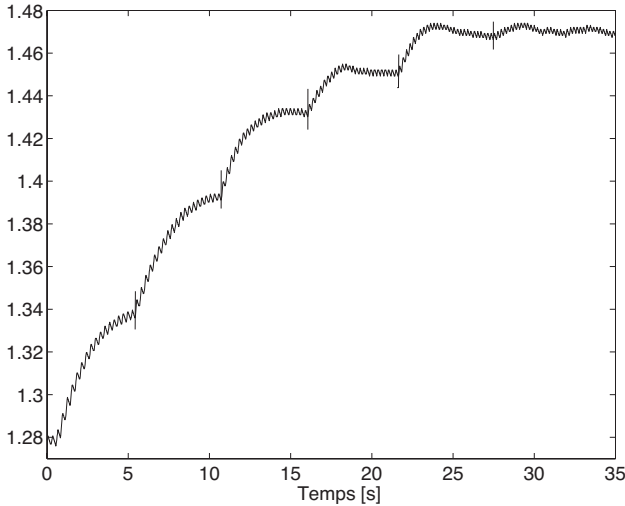


FIG. 4.19 – Variation du paramètre α durant la mesure de la norme infinie de la fonction de sensibilité.

de mesure. En figure 4.19, la variation du paramètre α est représentée durant la mesure de M_s lors de la dernière itération. Les différentes lignes verticales indiquent le temps où la pente de la saturation est augmentée. La figure 4.20, quant à elle, montre la dernière partie de la procédure de mesure, où le système oscille à la fréquence associée à la norme infinie de la fonction de sensibilité.

Les réponses indicielles des systèmes en boucle fermée sont dépeintes en figure 4.21. Les signaux de commande correspondant sont reproduits en figure 4.22. On y constate distinctement que le comportement occasionné par le régulateur proposé est grandement amélioré en poursuite. D'un autre côté, si le comportement en rejet de perturbations est considéré (même s'il n'est pas de première importance dans les problèmes ayant trait à la robotique), le régulateur Kappa-Tau engendrerait certainement un temps d'établissement plus court, car sa constante d'intégration est environ cinq fois plus petite que celle du régulateur résultant de l'optimisation. L'approche proposée permet cependant de considérer également le rejet de perturbations si désiré, en spécifiant des valeurs opportunes pour M_t et M_s .

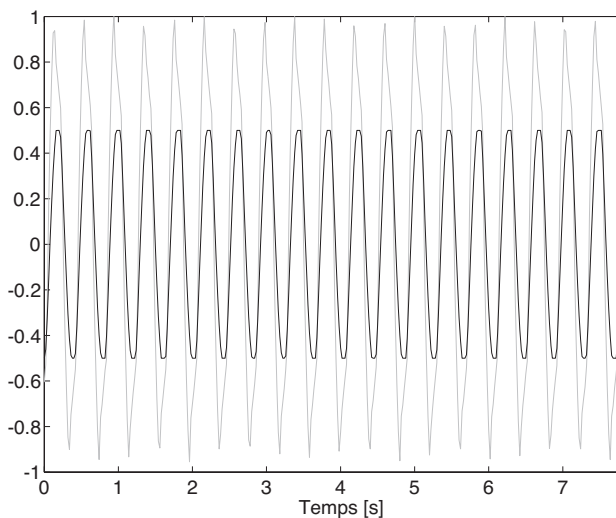


FIG. 4.20 – Cycle limite dont la pulsation correspond à ω_{M_s} (ligne noire : signal de référence de la boucle fermée; ligne grise : grandeur de commande du processus).

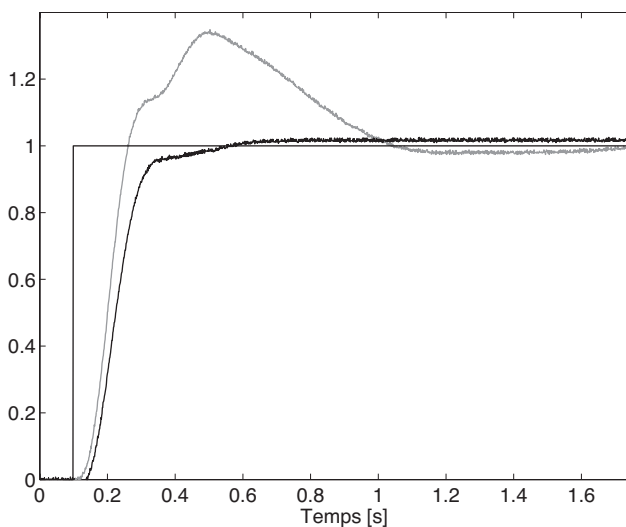


FIG. 4.21 – Réponses indicielles (ligne grise : Kappa-Tau; ligne noire : régulateur proposé).

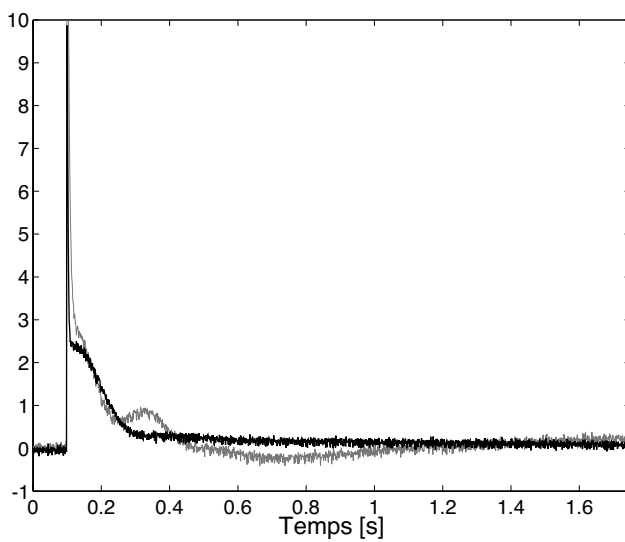


FIG. 4.22 – Evolution des grandeurs de commande (ligne grise : Kappa-Tau ; ligne noire : régulateur proposé).

4.9 Conclusions

Dans ce chapitre, différents aspects méthodologiques ont été abordés, dans le but de proposer une méthode d'ajustement de régulateurs ne nécessitant aucun modèle du système à commander. Dans un premier temps, différents schémas de mesure des marges de robustesse ont été présentés. Alors que les tests non linéaires mesurant les marges classiques de phase et de gain existaient déjà dans la littérature, de nouveaux instruments étudiés durant ce travail de thèse, permettent d'estimer la norme infinie des fonctions de sensibilité.

La procédure d'ajustement à proprement parler utilise ces mesures dans le but de dimensionner itérativement un régulateur conférant au système les marges désirées. Elle se fonde sur un critère fréquentiel défini par la somme pondérée au carré des différences entre les valeurs mesurées et celles spécifiées des paramètres de synthèse. La minimisation du critère est réalisée à l'aide de l'algorithme de Gauss-Newton, qui nécessite, pour le calcul du gradient et du Hessien, la connaissance des dérivées du critère par rapport aux paramètres du régulateur. Il a été montré que ces dernières peuvent être exprimées en fonction des dérivées du régulateur ainsi que des pentes en amplitude et en phase du système à commander. Lorsque celles-ci sont requises, les intégrales de Bode sont exploitées pour en fournir une estimation.

Il convient de rappeler, au vu du nombre restreint d'hypothèses faites dans ce chapitre, que la méthode d'ajustement est très générale. Elle permet, en outre, de laisser à l'utilisateur le libre choix des paramètres de synthèse, et ainsi de la complexité de l'ajustement. L'application des vases communicants est un exemple où seules la marge de phase ainsi que la pulsation de croisement sont considérées. D'une part, comme une seule courte expérience de mesure est nécessitée par itération, celle-ci peut être réalisée de manière continue. Il en résulte un dimensionnement effectué en un laps de temps très court. D'autre part, l'expérience relative à la transmission flexible constitue un exemple où la complexité de l'ajustement est quelque peu augmentée. Deux expériences plus longues sont requises par itération pour mesurer la norme infinie des fonctions de sensibilité. En contrepartie, de meilleurs résultats en découlent.

La généralité de la procédure s'applique aussi bien aux régulateurs considérés. Bien qu'un seul type de régulateurs ait été envisagé dans les exemples, la méthode ne se restreint pas à une structure particulière. D'autres structures d'ordre réduit peuvent, le cas échéant, aussi bien être prises en compte.

Finalement, il faut encore rappeler que l'optimisation proposée dans ce chapitre, comme beaucoup d'autres procédures dédiées à l'ajustement de régulateurs PID, n'est pas convexe. Ainsi, aucune garantie ne peut être donnée à l'utilisateur sur l'existence d'un ou de plusieurs minima, ni sur la convergence du critère vers l'extremum, où sa valeur devient idéalement nulle. En pratique, lorsque les propriétés du système commandé par le régulateur initial sont proches de celles désirées, le critère converge, comme l'ont montré les exemples présentés, en quelques itérations, vers un critère proche de 0, pour autant que les spécifications soient réalisables. Le régulateur obtenu par la méthode de Kappa-Tau constitue un choix approprié pour initier la procédure lorsque la robustesse souhaitée est élevée. Comme la convergence ne peut être démontrée, il est également important de pouvoir estimer à chaque itération la robustesse en stabilité du régulateur obtenu avant de le tester sur le système réel. Cela peut être fait en calculant le déplacement par le nouveau régulateur des points de la réponse harmonique de la boucle correspondant aux marges de robustesse mesurées lors de l'itération précédente. Enfin, une force de la méthode est, sans aucun doute, qu'elle permet en fin de procédure, par une nouvelle mesure des marges, de vérifier que les valeurs obtenues soient proches de celles spécifiées et ainsi que le système en boucle fermée possède effectivement les caractéristiques exigées.

Chapitre 5

Ajustement itératif fondé sur un modèle

5.1 Introduction

La démarche itérative proposée dans le chapitre précédent peut également être utilisée lorsqu'un modèle du système à commander est disponible. De manière générale, la contribution scientifique s'en trouve cependant passablement amoindrie dans ces circonstances. Les marges de robustesse peuvent, d'une part, être déterminées numériquement à chaque itération, rendant les techniques de mesure émises au chapitre 4 caduques. D'autre part, le gradient et le Hessien du critère peuvent être calculés analytiquement à l'aide de la description existante du processus, sans recourir aux artifices de calculs nécessités auparavant, pour leurs estimations. De plus, comme le nombre d'itérations devient sans importance, la minimisation du critère peut être réalisée par différents outils standard d'optimisation existants, allant des méthodes primitives (p. ex. avec l'arithmétique du Simplex [56]) à celles plus complexes, ayant trait à la programmation non linéaire (comme l'algorithme SQP¹ [23]). Enfin, il convient de noter que, dans le contexte où l'ajustement est fondé sur un modèle paramétrique, l'idée d'utiliser les normes infinies des fonctions de sensibilité comme contraintes

¹abréviation de *Sequential Quadratic Programming*

[4, 58, 60, 68] ou comme fonction coût [37] lors d'une optimisation existe de longue date. En outre, d'autres objectifs, telle que la maximisation du terme intégrale K_i , peuvent aisément être résolus conjointement au problème de robustesse [68]. Le présent chapitre n'a, par conséquent, pas pour finalité de traiter exactement le même problème d'ajustement que celui abordé dans le chapitre précédent, en présupposant l'existence d'un modèle paramétrique sous-jacent.

Mais l'emploi d'un modèle facilite d'une part l'analyse de l'existence de solutions à l'ajustement présenté dans le chapitre précédent. Une étude est tout d'abord proposée dans ce sens en section 5.2 pour déterminer, dans le cadre d'un régulateur PI, le nombre de solutions possibles au problème de synthèse considéré.

D'autre part, comme chaque modèle de système à commander est inéluctablement associé à des erreurs d'identification ou de modélisation, une extension de la procédure itérative d'ajustement est fournie en section 5.3 dans le but de pouvoir tenir compte d'incertitudes, afin de garantir performance et stabilité robustes au système réel en boucle fermée. Une application élégante de cette méthodologie permet de dimensionner une commande PID décentralisée pour les systèmes MIMO, en considérant chaque boucle de rétroaction séparément, tout en assurant cependant la stabilité du système global. Ces aspects seront présentés en section 5.4. Finalement, quelques remarques, formulée en section 5.5 en guise de conclusion, viendront étayer le présent chapitre.

5.2 Existence de solutions

En section 4.3, le problème de synthèse de régulateurs est formulé sous la forme d'une optimisation, dont l'objectif est la minimisation du critère fréquentiel exposé en équation (4.44). Idéalement, ce dernier prend une valeur voisine de 0 au terme de l'ajustement, témoignant ainsi que les valeurs obtenues pour les marges de robustesse sélectionnées tendent vers celles spécifiées. L'existence de cette solution $J = 0$ est étudiée en cette section.

L'étude est limitée au régulateur de type proportionnel-intégral (PI) dont

la fonction de transfert est exprimée sous la forme parallèle :

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad (5.1)$$

Le premier problème considéré est celui où les spécifications classiques de robustesse que sont les marges de phase et de gain sont choisies comme paramètres de synthèse. Les équations découlant d'une imposition de ces grandeurs sont de nature non linéaire et trigonométrique, si bien que le cas où le système à commander est décrit par une fonction de transfert quelconque ne peut être résolu. En présupposant cependant que le processus ait un comportement correspondant à celui d'un modèle de premier ordre avec retard pur, des conclusions peuvent être tirées. Une telle étude a été réalisée en [38], et, par souci de concision, seuls les résultats sont présentés ci-après. Quatre équations non linéaires sont obtenues, liant les quatre inconnues K_p , K_i , ω_c et ω_u à la constante de temps et au retard pur du système considéré. En estimant la fonction $\arctan(x)$ par une expression non-trigonométrique, une seule solution, de surcroît analytique, est obtenue. Le critère ne possède donc, dans cette situation, qu'un seul minimum.

Considérons maintenant le cas où les normes infinies des fonctions de sensibilité M_s et M_t sont sélectionnées comme paramètres de synthèse. L'étude ci-après se fonde en partie sur celle présentée en [4], où le terme intégral du régulateur est maximisé en veillant au respect d'une contrainte d'inégalité concernant la norme infinie de la fonction de sensibilité.

Des spécifications sur M_s ou M_t précisent que la réponse harmonique de la boucle se doit d'être tangente, dans le plan complexe, à des cercles définis par ces valeurs, tout en évitant d'y pénétrer (cf. chapitre 2). Considérons de manière très générale un cercle dont le centre, sur l'axe réel négatif, est donné par la coordonnée $-C_c$ et le rayon par R_c . Définissons la fonction f comme étant le carré de la distance d'un point de la réponse harmonique de la boucle au centre du cercle [4] :

$$f(K_p, K_i, \omega) = |C_c + L(j\omega)|^2 = \left| C_c + \left(K_p - \frac{K_i}{\omega} \right) G(j\omega) \right|^2 \quad (5.2)$$

Pour que $L(j\omega)$ évite d'entrer dans le cercle, la contrainte suivante doit être satisfaite :

$$f(K_p, K_i, \omega) \geq R_c^2 \quad (5.3)$$

Soit $x(\omega)$ et $y(\omega)$ les parties réelle et imaginaire respectives de la réponse harmonique du système à commander :

$$G(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega) = r_G(\omega)e^{j\varphi_G(\omega)} \quad (5.4)$$

où :

$$x(j\omega) = r_G(\omega) \cos(\varphi_G(\omega)) \quad (5.5)$$

$$y(j\omega) = r_G(\omega) \sin(\varphi_G(\omega)) \quad (5.6)$$

En considérant les équations ci-dessus, la fonction f peut être reformulée comme suit [4] :

$$f(K_p, K_i, \omega) = C_c^2 + 2C_c x(\omega)K_p + 2C_c \frac{y(\omega)}{\omega} K_i + r_G^2(\omega) K_p^2 + \frac{r_G^2(\omega)}{\omega^2} K_i^2 \quad (5.7)$$

La contrainte donnée en équation (5.3) possède maintenant une interprétation géométrique très élégante dans le plan (K_p, K_i) des paramètres du régulateur. Pour chaque valeur fixe de ω , l'inégalité (5.3) représente l'extérieur d'une ellipse dont les axes sont parallèles à ceux des coordonnées [4]. Ainsi, en balayant la plage $0 \leq \omega < \infty$, les ellipses génèrent des enveloppes qui définissent le lieu où la contrainte de tangentialité entre la réponse harmonique de la boucle et le cercle est satisfaite. Deux branches sont engendrées par les enveloppes, mais une seule correspond à un système stable en boucle fermée. La figure 5.1 dépeint un exemple où, pour un système à commander donné, une contrainte de sensibilité est émise. La zone sous les ellipses correspond à un système stable en boucle fermée. L'enveloppe délimitant cette zone correspond à la région de robustesse, où la valeur exigée du paramètre M_s est satisfaite.

Lorsque des spécifications sont émises sur les normes infinies M_s et M_t , l'existence d'une solution où le critère J prend la valeur nulle est donnée par l'intersection de deux enveloppes, associées respectivement à chacun de ces paramètres. Considérons à titre d'exemple le système à commander décrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{(s+1)} \quad (5.8)$$

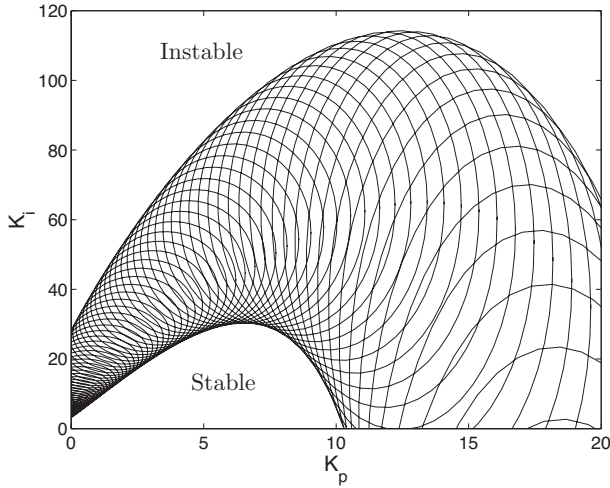


FIG. 5.1 – Interprétation graphique d'ellipses générées par une contrainte de sensibilité.

Soit M_s^* et M_t^* des spécifications émises sur les normes infinies des fonctions de sensibilité. Les valeurs sélectionnées dans l'exemple de la section 4.7.2 sont tout d'abord considérées :

$$M_s^* = 1.40, \quad M_t^* = 1.03 \quad (5.9)$$

Pour ces grandeurs, l'interprétation graphique, exposée en figure 5.2, témoigne de l'existence d'une seule solution au problème d'ajustement. Si maintenant la valeur spécifiée est augmentée à :

$$M_t^* = 1.20 \quad (5.10)$$

la figure 5.3 montre que deux jeux de paramètres du régulateur peuvent satisfaire les contraintes. L'un correspond à des gains K_p et K_i plus élevés que l'autre. Dans le cas où plusieurs solutions existent, le régulateur initialisant l'optimisation joue un rôle crucial. Il est fort à parier que l'algorithme de Gauss-Newton, choisi pour la minimisation du critère, convergera vers la solution la plus proche du régulateur initial. C'est notamment le cas pour l'exemple considéré, si l'on choisit le régulateur initial par la méthode de Kappa-Tau [7] où la procédure d'ajustement converge vers le régulateur

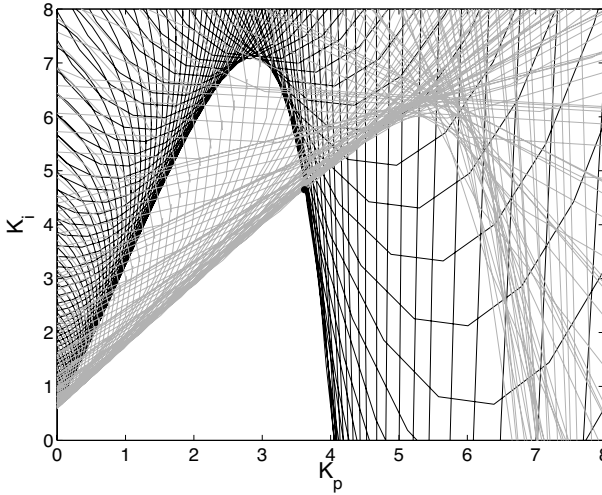


FIG. 5.2 – Illustration graphique de l'existence d'une seule solution pour $M_s^* = 1.40$ et $M_t^* = 1.03$.

suivant :

$$K_p = 3.18 \quad K_i = 7.0 \quad (5.11)$$

Enfin, si la spécification M_t^* est augmentée à 1.40, comme le montre la figure 5.4, aucun régulateur PI ne peut satisfaire les spécifications émises, bien que les cercles correspondant à celles-ci soient bien distincts dans le plan complexe. Dans ce cas, L'algorithme converge vers un minimum correspondant à une valeur non-nulle du critère. Les paramètres suivants sont obtenus pour le régulateur :

$$K_p = 1.88 \quad K_i = 5.52 \quad (5.12)$$

Ce jeu confère les valeurs suivantes au système en boucle fermée, pour les paramètres de synthèse :

$$M_s = 1.44 \quad M_t = 1.37 \quad (5.13)$$

Ainsi, pour récapituler les résultats obtenus dans cette section, il doit être souligné que, si le problème d'ajustement des marges de phase et de gain pour un système d'ordre un avec retard pur possède une solution unique, il

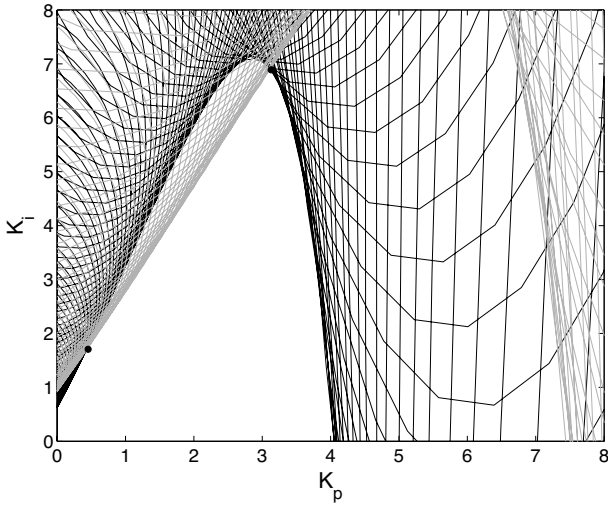


FIG. 5.3 – Illustration graphique de l'existence de deux solutions pour $M_s^* = 1.40$ et $M_t^* = 1.20$.

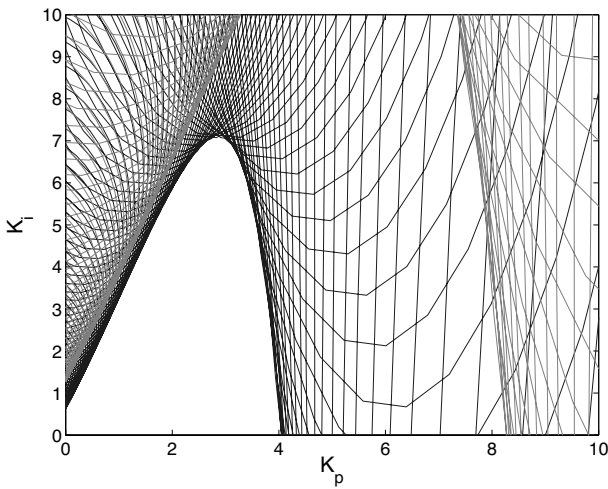


FIG. 5.4 – Illustration graphique de l'existence d'aucune solution pour $M_s^* = 1.40$ et $M_t^* = 1.40$.

n'en va pas de même pour l'ajustement de la norme infinie des fonctions de sensibilité. Une telle synthèse peut avoir 0, 1 ou plusieurs solutions, même lorsque le processus a un comportement correspondant à un modèle de premier ordre. En conséquence, il est important, en pratique, pour ce genre de problème non-convexe, de choisir judicieusement le régulateur initial afin de converger vers une solution opportune. Dans le cas où aucune solution satisfaisant les exigences n'est obtenue, le nombre de paramètres du régulateur peut être augmenté afin de générer très certainement de nouvelles solutions au problème.

5.3 Stabilité et performance robustes

Toute modélisation d'un processus existant est entachée d'erreurs qui peuvent compromettre la stabilité ainsi que les performances lorsque la commande synthétisée sur la base du modèle est appliquée au système réel. La plupart des méthodes ayant trait aux régulateurs PID ne considèrent les incertitudes qu'implicitement en définissant des marges de robustesse suffisamment grandes. La synthèse est ainsi très souvent fondée sur un modèle nominal du processus. Seules des solutions très fragmentaires existent dans la littérature [57, 59] pour concevoir une commande PID en prenant en compte explicitement ces incertitudes. Dans cette section, une extension de la méthode d'ajustement itérative exposée au chapitre 4 est présentée dans le but de garantir stabilité et performance robustes, en termes de normes infinies des fonctions de sensibilité, à un système décrit par un modèle nominal accompagné d'un profil d'incertitudes.

5.3.1 Profil d'incertitudes

De par leur généralité, les incertitudes non-structurées [21] sont préférées ici. Elle peuvent représenter aussi bien des perturbations paramétriques associées à un modèle que des dynamiques non-modélisées d'un processus. Plus particulièrement, les incertitudes en forme de disque sont considérées pour une analyse détaillée. Ces profils sont faciles à générer et la procédure qui en découle est simple et très générale. En contrepartie, le prix à payer pour cette aisance est un conservatisme de la solution obtenue vis-à-vis des

spécifications émises.

Un modèle de perturbations multiplicatif est envisagé. Par conséquent, on considère que le processus physique $G(s)$ appartient à un ensemble G_e de fonctions de transfert perturbées stables, défini par [21] :

$$G(s) \in G_e = \{G_n(s)(1 + W(s)\Delta(s))\} \quad (5.14)$$

où $G_n(s)$ représente le modèle nominal stable du système à commander, $W(s)$, qui est appelé profil d'incertitudes, est une fonction de transfert fixe et stable, qui donne la borne supérieure de l'amplitude des incertitudes. $\Delta(s)$, quant à elle, symbolise une fonction de transfert variable et stable, satisfaisant :

$$\|\Delta\|_\infty < 1 \quad (5.15)$$

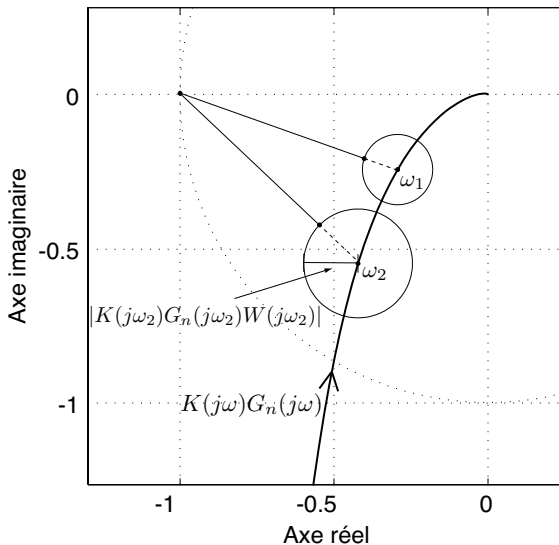
Dans le plan complexe, l'image de G_e donnée par l'équation (5.14) est ainsi décrite par la courbe de Nyquist du système nominal sur lequel s'ajoute en chaque pulsation un disque d'incertitude de rayon $|G_n(j\omega)W(j\omega)|$. Différentes approches pour obtenir la fonction de pondération fréquentielle des incertitudes sont présentées en [21] et illustrées à l'aide d'exemples.

5.3.2 Stabilité robuste

On souhaite maintenant ajuster un régulateur garantissant la stabilité en boucle fermée non seulement du modèle nominal, mais également de n'importe quel système appartenant à l'ensemble G_e . Dans ce but, et comme ce fut le cas lors de l'ajustement proposé au chapitre 4, la marge de module représentant la norme infinie de la fonction de sensibilité et définie comme la distance minimale du point critique -1 à la réponse harmonique de la boucle, est utilisée ici. La marge de module minimale \tilde{M}_m est définie, pour un régulateur donné $K(s)$, comme distance minimale du point -1 dans le plan complexe, à l'ensemble des réponses harmoniques obtenues par G_e , à savoir :

$$\tilde{M}_m = \inf_{\omega} \left(\inf_{\Delta} |1 + K(j\omega)G_n(j\omega)(1 + W(j\omega)\Delta(j\omega))| \right) \quad (5.16)$$

Cette équation stipule tout simplement que \tilde{M}_m doit être établi en calculant en chaque pulsation la distance minimale entre le point -1 et le disque d'incertitude, puis en prenant la valeur minimale obtenue, par rapport à la

FIG. 5.5 – Illustration du calcul de \tilde{M}_m .

pulsation. La figure 5.5 dépeint une représentation de la réponse harmonique de la boucle nominale ainsi que les disques d'incertitudes en deux pulsations distinctes. Il peut ainsi être aisément constaté qu'en une pulsation donnée ω_i , la distance minimale du point critique au disque d'incertitude est égale à celle du point -1 à $K(j\omega_i)G(j\omega_i)$ de laquelle est soustrait le rayon du cercle d'incertitude. Ainsi :

$$\inf_{\Delta} |1 + K(j\omega)G_n(j\omega)(1 + W(j\omega)\Delta(j\omega))| = |1 + K(j\omega)G_n(j\omega)| - |K(j\omega)G_n(j\omega)W(j\omega)| \quad (5.17)$$

L'équation (5.16) peut, par conséquent, être formulée de la manière suivante :

$$\tilde{M}_m = \inf_{\omega} (|1 + K(j\omega)G_n(j\omega)| - |K(j\omega)G_n(j\omega)W(j\omega)|) \quad (5.18)$$

Cette valeur peut maintenant être calculée aisément de manière numérique.

La grandeur \tilde{M}_m peut maintenant être sélectionnée comme paramètre de synthèse dans le critère fréquentiel représenté en équation (4.44) pour garantir la stabilité robuste du système perturbé.

À des fins de minimisation du critère, la dérivée du terme considéré par rapport aux paramètres du régulateur est requise. Celle-ci peut être exprimée de la manière suivante :

$$\frac{d\tilde{M}_m}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \tilde{M}_m}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \left. \frac{\partial \tilde{M}_m}{\partial \omega} \right|_{\tilde{\omega}_{M_m}} \frac{\partial \tilde{\omega}_{M_m}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (5.19)$$

où $\tilde{\omega}_{M_m}$ est la fréquence associée à la marge. En émettant l'hypothèse que $K(j\omega)$, $G(j\omega)$ et $|W(j\omega)|$ ainsi que leurs dérivées sont des fonctions continues en ω , le résultat suivant est obtenu :

$$\left. \frac{\partial \tilde{M}_m}{\partial \omega} \right|_{\tilde{\omega}_{M_m}} = 0 \quad (5.20)$$

Ce résultat découle du fait que, par définition, \tilde{M}_m est le minimum par rapport à ω et sa dérivée est, par conséquent, nulle.

Ainsi :

$$\frac{d\tilde{M}_m}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial |1 + K(j\tilde{\omega}_{M_m})G_n(j\tilde{\omega}_{M_m})|}{\partial \boldsymbol{\rho}} - \frac{\partial |K(j\tilde{\omega}_{M_m})G_n(j\tilde{\omega}_{M_m})W(j\tilde{\omega}_{M_m})|}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (5.21)$$

Cette dérivée peut être calculée de manière analytique sans recourir à aucune dérivée du modèle nominal, ni du profil d'incertitudes. D'un point de vue pratique, cette information revêt une grande importance, car les profils d'incertitudes sont très souvent disponibles sous forme de modèles non-paramétriques dont les dérivées ne sont pas directement connues et peuvent seulement être estimées de manière grossière.

5.3.3 Performance robuste

Par analogie à la stabilité robuste, on désire maintenant garantir la performance en terme de norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire à tous les systèmes appartenant à l'ensemble G_e . Le calcul de la valeur de ce paramètre de synthèse pour un ensemble de processus n'est pas aussi aisé que celui de la marge de module. En effet, chaque valeur spécifiée est

associée, dans le plan complexe, à un cercle dont le centre se trouve en un point différent. Pour remédier à cette difficulté, seul le cercle correspondant à la valeur spécifiée \tilde{M}_t^* pour la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire minimale de l'ensemble G_e , est considéré. Pour rappel, les coordonnées de son centre et de son rayon sont données comme suit (cf. équations (2.27) et (2.28)) :

$$c_{M_t^*} = \frac{-\tilde{M}_t^{*2}}{\tilde{M}_t^{*2} - 1} \quad (5.22)$$

$$r_{M_t^*} = \frac{\tilde{M}_t^*}{\left(\tilde{M}_t^{*2} - 1\right)^2} \quad (5.23)$$

Le paramètre considéré pour l'ajustement est la distance minimale entre le centre du cercle $c_{M_t^*}$ et l'image de l'ensemble G_e sur le plan complexe :

$$d_{\min} = \inf_{\omega} \left(\inf_{\Delta} \left| -c_{M_t^*} + K(j\omega)G_n(j\omega)(1 + W(j\omega)\Delta(j\omega)) \right| \right) \quad (5.24)$$

Cette dernière peut, pour les mêmes raisons que l'équation (5.16), être réécrite de la manière suivante :

$$d_{\min} = \inf_{\omega} \left(\left| -c_{M_t^*} + K(j\omega)G_n(j\omega) \right| - \left| K(j\omega)G_n(j\omega)W(j\omega) \right| \right) \quad (5.25)$$

d_{\min} peut maintenant être facilement déterminé numériquement et ainsi être utilisé dans le critère fréquentiel, dans le but d'ajuster la norme infinie de la fonction de sensibilité minimale de l'ensemble G_e . Sa valeur de spécification est notamment donnée par l'équation suivante :

$$d_{\min}^* = r_{M_t^*} = \frac{\tilde{M}_t^*}{\left(\tilde{M}_t^{*2} - 1\right)^2} \quad (5.26)$$

La dérivée nécessaire au calcul du gradient et du Hessian est donnée comme suit :

$$\frac{dd_{\min}}{d\boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial d_{\min}}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \frac{\partial d_{\min}}{\partial \omega} \bigg|_{\omega_{d_{\min}}} \frac{\partial \omega_{d_{\min}}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (5.27)$$

$$= \frac{\partial d_{\min}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \quad (5.28)$$

où $\omega_{d_{\min}}$ est la pulsation associée à d_{\min} .

Ainsi :

$$\frac{dd_{\min}}{d\rho} = \frac{\partial | -c_{M_t^*} + K(j\tilde{\omega}_{d_{\min}})G_n(j\tilde{\omega}_{d_{\min}}) |}{\partial \rho} - \frac{\partial | K(j\tilde{\omega}_{d_{\min}})G_n(j\tilde{\omega}_{d_{\min}})W(j\tilde{\omega}_{d_{\min}}) |}{\partial \rho} \quad (5.29)$$

À nouveau, ce terme peut être calculé sans nécessiter de dérivées ni du modèle nominal, ni du profil d'incertitudes.

Remarque 5.1 : Bien que seules les incertitudes discales soient considérées dans le présent ouvrage, la méthode n'est pas limitée à ce type de profil. Par exemple, les incertitudes paramétriques ellipsoïdales qui, dans les applications pratiques, découlent parfois de la procédure d'estimation standard des moindres carrés [22], peuvent également être prises en compte [34].

5.3.4 Exemple de simulation

La synthèse robuste proposée est maintenant illustrée à l'aide d'un exemple de simulation. La fonction de transfert suivante symbolise le système à commander :

$$G(s) = \frac{e^{-\tau s}}{(s+1)^2} \quad (5.30)$$

où le retard pur ne peut être déterminé de manière précise et peut varier dans l'intervalle donné :

$$\tau = 0.3 \pm 20\% \quad (5.31)$$

Il est à noter que de telles incertitudes paramétriques sont très courantes en pratique. Nombreux sont les composants mécaniques ou électriques dont les propriétés peuvent varier en fonction de l'état du système ou de conditions ambiantes. D'autres sources d'incertitudes paramétriques sont aussi parfois de légères non-linéarités présentes dans le système.

Afin d'appliquer la méthodologie proposée, ces incertitudes paramétriques doivent maintenant être converties en un profil non-structuré. Pour

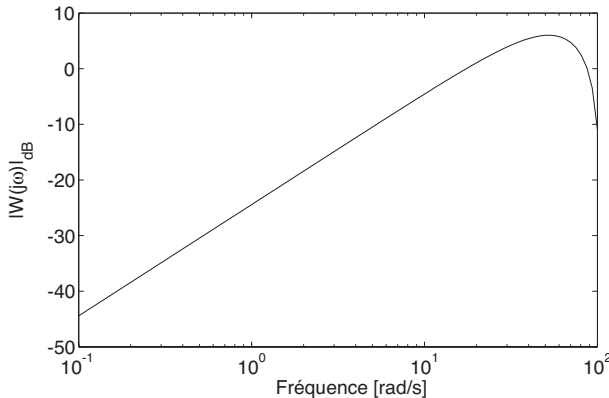


FIG. 5.6 – Diagramme de Nyquist de la réponse harmonique de la boucle avec les disques d'incertitudes.

ce faire, un modèle nominal doit tout d'abord être défini. Il est choisi naturellement comme suit :

$$G_n(s) = \frac{e^{-0.3s}}{(s+1)^2} \quad (5.32)$$

Le profil d'incertitudes W est ensuite déterminé à partir de l'équation (5.14) :

$$|W(j\omega)| = \max_{\tau} \left| \frac{G(j\omega)}{G_n(j\omega)} - 1 \right| \quad (5.33)$$

La figure 5.6 représente le diagramme de Bode en amplitude du résultat obtenu. La synthèse du régulateur à proprement parler peut maintenant commencer. Des spécifications sont alors émises sur les normes infinies des fonctions de sensibilité minimales :

$$\tilde{M}_s^* = 1.6 \quad \tilde{M}_t^* = 1.10 \quad (5.34)$$

Les exigences peuvent être, comme c'est le cas ici, quelque peu réduites, par rapport à la situation où l'ajustement est réalisé sans modèle. (voir chapitre 4). La raison principale est que les marges considérées n'ont plus besoin d'inclure implicitement des incertitudes, puisque celles-ci sont prises en compte de manière explicite. D'autre part, les solutions obtenues sont conservatrices, dues aux profils discaux envisagés ici. Il faut noter que plus le modèle est incertain, plus la solution sera conservatrice.

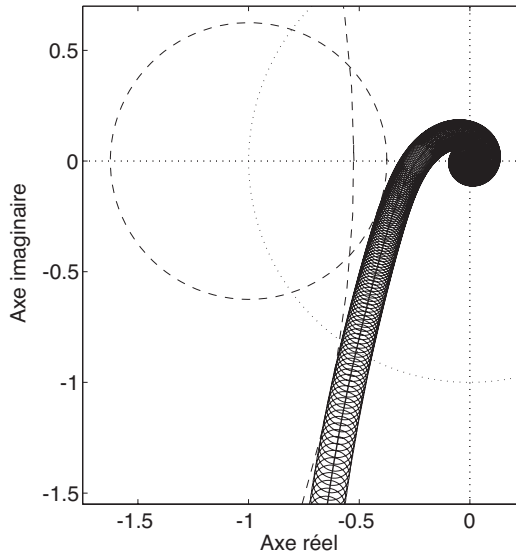


FIG. 5.7 – Diagramme de Nyquist de la boucle avec les disques d'incertitudes.

Comme seuls deux paramètres de synthèse sont pris en compte, afin de réduire le nombre de solutions existantes au problème d'ajustement et de rendre le Hessien strictement défini positif, la contrainte $T_i = 4T_d$ est formulée. Pour ce genre de système à commander ne possédant pas d'intégrateur et dont le rapport κ , défini en équation (3.8), est inférieur à 0.6, elle constitue très souvent une solution opportune [7].

Un régulateur initial est tout d'abord dimensionné par la méthode de Kappa-Tau, en utilisant à cette fin le modèle nominal du système à commander. Le critère est ensuite minimisé itérativement jusqu'à l'obtention, à un epsilon près, d'une valeur numérique nulle.

Le diagramme de Nyquist du modèle nominal ainsi que les cercles représentant les incertitudes, mais aussi les spécifications, sont dépeints en figure 5.7. On y constate aisément que les exigences formulées sont satisfaites et que le système en boucle fermée est robuste en performance et en stabilité envers les incertitudes considérées. En figure 5.8, la réponse indicielle du système en boucle fermée est exposée et comparée avec celles obtenues

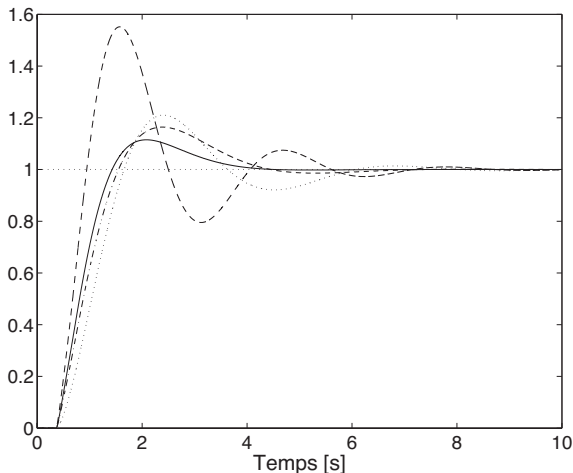


FIG. 5.8 – Réponses indicielles (— : Solution proposée; --- : Ziegler-Nichols; - · - : Kappa-Tau; · · : IMC).

par des solutions classiques, reconnues par la communauté industrielle. Ces réponses sont établies en considérant le modèle présentant le retard pur le plus grand ($\tau = 0.3 + 20\%$). Les régulateurs obtenus par les méthodes de Ziegler-Nichols et Kappa-Tau ne sont pas directement comparables, car ces dernières ne considèrent pas les incertitudes inhérentes au processus. En revanche, elles sont directement prises en compte par la procédure IMC. Cette dernière nécessite cependant l'identification d'un modèle nominal de premier ordre avec retard pur du système à commander [50] et ne peut considérer directement celui exposé en équation (5.32). Un profil d'incertitudes est subséquentement déterminé et la borne inférieure λ_{\min} du paramètre λ , déterminant la bande passante [50, 57] est calculée de façon à garantir la stabilité robuste. La valeur finale du paramètre λ est choisie selon la règle recommandée en [50] :

$$\lambda = 4\lambda_{\min} \quad (5.35)$$

La performance robuste n'est par contre pas assurée par le régulateur IMC.

La figure 5.8 témoigne que le régulateur obtenu par la méthode offerte en cette section confère de meilleures performances en termes de dépassement et en temps d'établissement que celui obtenu par des méthodes utilisées

TAB. 5.1 – Résultats de simulation.

Méthode	K_p	T_i	T_d
Ziegler-Nichols	4.41	1.25	0.311
Kappa-Tau	2.27	1.50	0.382
IMC	2.23	2.02	0.18
Proposée	2.52	1.69	0.423

pour comparaison et ainsi qu'il est un choix approprié pour la commande du processus. Les paramètres des différents régulateurs sont reproduits en table 5.1. Le lecteur intéressé trouvera d'autres exemples de simulation où la stabilité robuste a été traitée en [28].

5.3.5 Application

La méthodologie proposée a été appliquée au processus présenté en [45, 46] composé d'un système de positionnement à deux axes entraînés par des moteurs linéaires synchrones à aimants permanents. Un tel système est représenté en figure 5.9. Ces structures sont appréciées pour leurs faibles inerties qui permettent de fortes accélérations, leurs taux de frottements modérés ainsi que l'absence de systèmes de transmission mécanique, épargnant les problèmes de jeux et rendant ainsi possible un positionnement ultra précis. D'un autre côté, l'agencement en deux axes perpendiculaires rend la dynamique en un point de fonctionnement dépendante de la position des deux axes.

La sortie du système considéré est la position du moteur sur le premier axe, mesuré à l'aide d'un encodeur de position analogique, permettant, à l'aide d'un interpolateur, d'obtenir une résolution de 0.24 nm. L'entrée consiste en une consigne de courant. Cette consigne de courant est recalculée pour donner une consigne pour chacune des phases du moteur, dont l'asservissement est réalisé de manière indépendante. La fréquence d'échantillonnage est fixée à 18 kHz.

On se propose ici de dimensionner un régulateur PID de façon à obtenir au minimum la stabilité et la performance souhaitées quelle que soit la position du système XY. Pour ce faire, chaque axe de 32 centimètres est divisé en 8 segments de même longueur qui définissent ainsi 81 points de

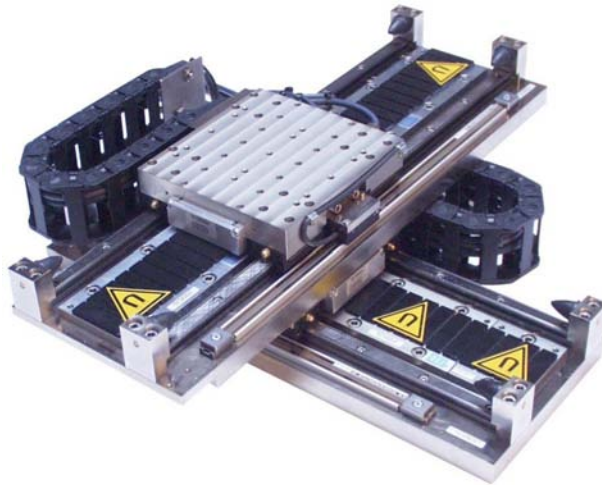


FIG. 5.9 – Système de positionnement à deux axes (photo gracieusement remise par la maison ETEL SA).

fonctionnement. En chacun d'eux, un signal composé d'une somme de sinus, de fréquences allant de 8.8 à 3000 Hz, est utilisé pour alimenter le moteur et permettre ainsi l'identification de 81 modèles non-paramétriques du système dans le domaine fréquentiel. Les diagrammes de Bode en amplitude des descriptions du processus ainsi obtenues sont dépeints en figure 5.10. De larges différences d'amplitude, dues au changement de comportement du système selon les positions des deux axes, peuvent être constatées en basses fréquences. En hautes fréquences, ce sont les bruits de mesure ainsi que la représentation logarithmique qui sont responsables des variations perçues.

En faisant la moyenne des amplitudes et des phases à chaque fréquence, un modèle nominal non-paramétrique $G_n(j\omega)$ est ainsi défini :

$$|G_n(j\omega)| = \frac{1}{81} \sum_{i=1}^{81} |G_i(j\omega)| \quad (5.36)$$

$$\angle G_n(j\omega) = \frac{1}{81} \sum_{i=1}^{81} \angle G_i(j\omega) \quad (5.37)$$

où $G_i(s)$ représente le $i^{\text{ème}}$ modèle non-paramétrique. Puis le profil d'incer-

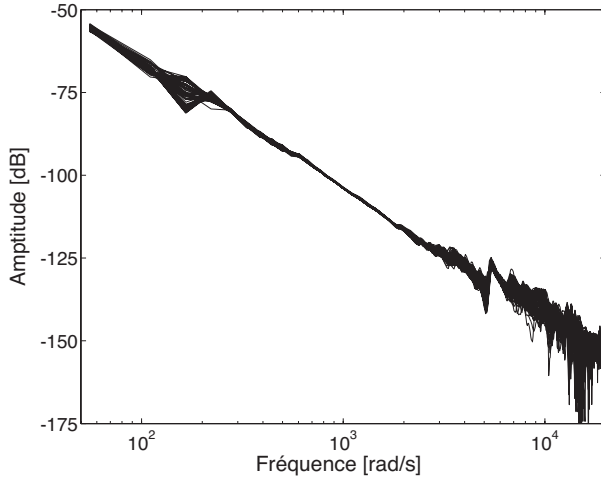


FIG. 5.10 – Diagramme de Bode en amplitude des 81 modèles non-paramétriques.

titudes W est ensuite déterminé à partir de l'équation (5.14) de sorte qu'en chaque pulsation considérée :

$$|W(j\omega)| = \max_i \left| \frac{G_i(j\omega)}{G_n(j\omega)} - 1 \right| \quad (5.38)$$

Le régulateur initial fourni par le constructeur est le suivant :

$$K(s) = 1.144 \cdot 10^5 + \frac{5.15 \cdot 10^7}{s} + 1.62 \cdot 10^2 s \quad (5.39)$$

Aucun filtre n'est en outre implanté dans le terme dérivé.

Remarque 5.2 : La forme parallèle du régulateur est considérée ici dans le but d'avoir des paramètres du régulateur ayant le même ordre de grandeur. Dans la forme standard, il en résulte des constantes d'amplitude très différentes, ce qui génère des problèmes de conditionnement, du Hessien essentiellement. L'un des avantages de la méthode est justement sa flexibilité envers la description choisie pour le régulateur.

La réponse harmonique de la boucle résultant du régulateur initial ainsi que les incertitudes discales sont exposées en figure 5.11. On conçoit aisément que le processus sous-jacent ne soit pas facile à commander, car il a les

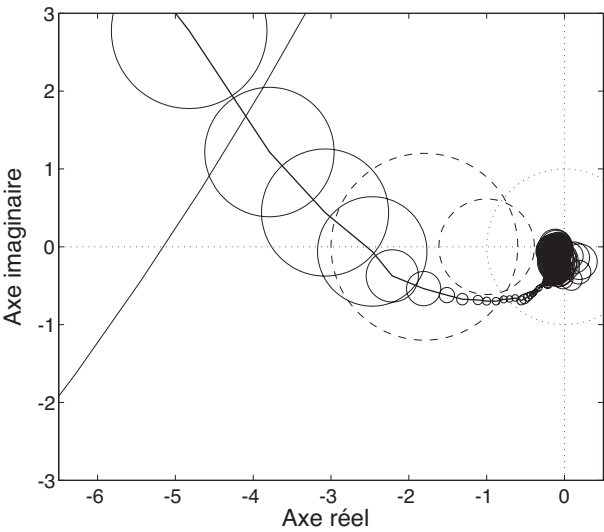


FIG. 5.11 – Diagramme de Nyquist de la boucle avec les incertitudes discales résultant du régulateur initial.

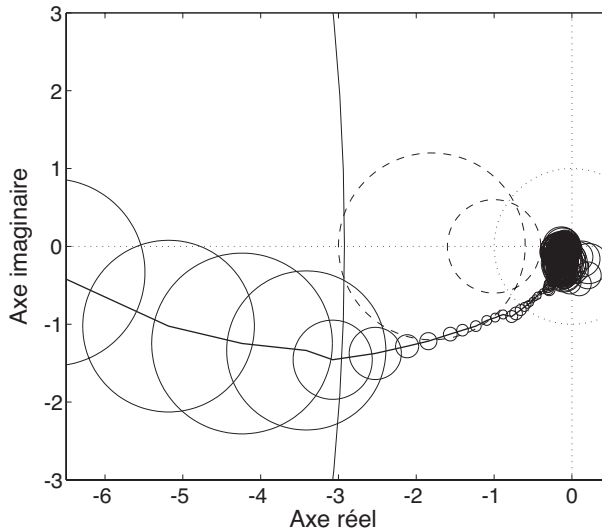


FIG. 5.12 – Diagramme de Nyquist de la boucle avec les incertitudes discales résultant du régulateur proposé.

caractéristiques hautes fréquences typiques d'un système instable, constitué d'un double intégrateur et d'un retard pur. La performance spécifiée en terme de norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire doit en outre être modeste. Des exigences sont alors émises pour la stabilité et la performance robustes désirées :

$$\tilde{M}_s^* = 1.60 \quad \tilde{M}_t^* = 1.50 \quad (5.40)$$

Les cercles du plan complexe associés à ces dernières apparaissent également en figure 5.11 et démontrent que le régulateur initial ne permet pas de les satisfaire. Le critère fréquentiel formé des normes précitées est alors minimisé itérativement. Le minimum, bien que proche de 0, ne converge pas vers cette valeur. En d'autres termes, les marges spécifiées ne peuvent être atteintes exactement. Le diagramme de Nyquist de la boucle obtenue, les cercles de spécification ainsi que ceux décrivant les incertitudes sont représentés en figure 5.12. Il peut être établi, en regard à cette figure, que le régulateur permet quasiment de satisfaire les spécifications et qu'il est ainsi

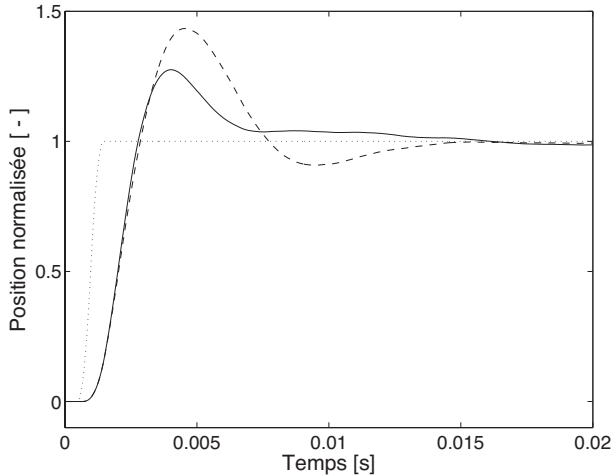


FIG. 5.13 – Réponses indicielles (— : régulateur initial; - - : régulateur proposé).

convenable. Ces paramètres sont les suivants :

$$K(s) = 1.61 \cdot 10^5 + \frac{2.57 \cdot 10^7}{s} + 1.82 \cdot 10^2 s \quad (5.41)$$

Le comportement temporel engendré par les deux régulateurs en un point de fonctionnement donné sont comparés en figure 5.13 à l'aide d'une réponse indicielle. Comme attendu, la commande dimensionnée en cette section permet d'abaisser considérablement le dépassement (de 44% à 27%, soit une diminution relative de 17%) tout en réduisant également le temps d'établissement. Les signaux de commande sont exposés en figure 5.14.

5.4 Extension aux systèmes multivariables

La procédure robuste traitée dans la section précédente possède une application très intéressante dans le cadre des systèmes multivariables (MIMO). En pratique, beaucoup de processus sont de ce type et différentes méthodes classiques (H_∞ [70], LQR [2], ...) existent pour l'ajustement de régulateurs adaptés à ces structures. Le désavantage principal des méthodes MIMO est qu'elles produisent des régulateurs d'état d'ordre élevé, souvent

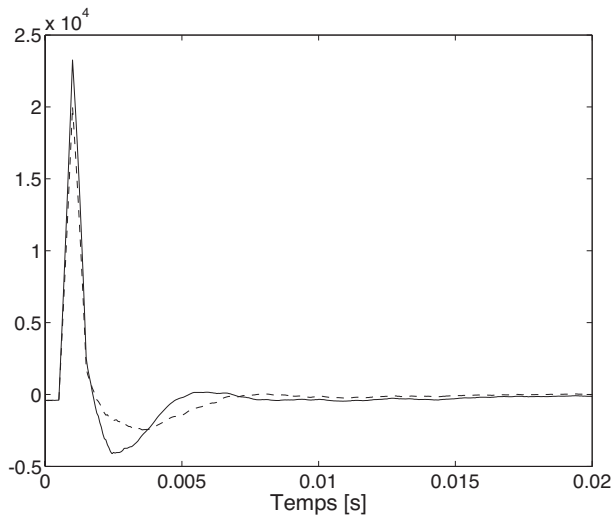


FIG. 5.14 – Grandeurs de commande (— : régulateur initial, - - : régulateur proposé).

difficiles à mettre en œuvre. De plus, les systèmes à commander contenant des retards purs non négligeables ne peuvent pas être considérés tels quels par de telles approches [64]. Dans beaucoup de situations encore est privilégiée une commande décentralisée, où le contrôle de chaque boucle est traité de manière individuelle, par des procédures SISO, mettant en œuvre des régulateurs d'ordre restreint. Cette motivation vient du fait que, très souvent, les interactions entre les boucles sont assez faibles ou peuvent, à l'aide de compensateurs de découplage, être suffisamment amoindries, de sorte que le système MIMO soit diagonalement dominant. Dans ce cas, chaque boucle peut être dimensionnée séparément et les interactions sont traitées comme des perturbations. De plus, la stabilité du système MIMO en boucle fermée peut être garantie par les approches SISO, grâce aux bandes de Gershgorin [65, 72], dont l'essence de la théorie sous-jacente est rappelée brièvement en section 5.4.2. Ces bandes transcrivent les interactions sous forme d'incertitudes pouvant être combinées aux réponses harmoniques des systèmes diagonaux. Différents auteurs les ont utilisées précédemment dans la littérature. En [79], les auteurs proposent des formules analytiques pour le dimensionnement de régulateurs PID décentralisés conférant les marges de

phase et de gain spécifiées pour les bandes de Gershgorin. Cette approche est cependant limitée aux modèles du processus de second ordre avec deux pôles simples ainsi qu'un retard pur. En [16], le gain et la pulsation critiques sont définis pour les systèmes MIMO à l'aide des bandes précitées et une méthode de synthèse de PID est dérivée des règles de Ziegler-Nichols. L'approche présentée souffre de la nécessité d'identifier un modèle paramétrique complet pour finalement n'utiliser qu'un seul point de la réponse harmonique ainsi qu'une loi d'ajustement très empirique. Les deux méthodes précitées ne garantissent en outre nullement la stabilité du système MIMO.

Dans cette section, on se propose d'utiliser la procédure itérative introduite dans le chapitre 4, pour l'ajustement de régulateurs PID décentralisés, en se basant sur la norme infinie des fonctions de sensibilité. Ces dernières permettent de garantir les performances de chaque boucle indépendamment ainsi que la stabilité MIMO en assurant une distance minimale entre les bandes de Gershgorin et le point critique -1 . Notons que la méthode explicitée dans cette section a fait l'objet antérieurement d'une publication [29], où le lecteur intéressé pourra y trouver plus de détails ainsi que d'autres exemples de simulation.

Remarque 5.3 : Pour faciliter l'écriture, dans cette section, l'élément en ligne i et colonne j d'une matrice \mathbf{L} est indiqué par l_{ij} .

5.4.1 Configuration du système

La configuration d'un système décentralisé est tout d'abord rappelée ici. La figure 5.15 dépeint une telle structure, où $\mathbf{K}(s)$, $\mathbf{Q}(s)$, et $\mathbf{G}_p(s)$ sont des matrices de dimension $m \times m$ de fonctions de transfert (également dénommées matrices de transfert). $\mathbf{G}_p(s)$ décrit le système à commander alors que $\mathbf{K}(s) = \text{diag}\{k_1(s) \dots k_m(s)\}$ est une matrice diagonale contenant les fonctions de transfert du régulateur ; $\mathbf{Q}(s)$ représente la matrice de transfert du pré-compensateur. \mathbf{r} et \mathbf{y} sont des vecteurs de dimension m symbolisant les signaux de référence ainsi que les grandeurs à commander.

Le pré-compensateur est utilisé pour découpler les boucles, de sorte que la commande globale puisse être obtenue par le dimensionnement de systèmes SISO indépendants. Si $\mathbf{G}(s) = \mathbf{G}_p(s)\mathbf{Q}(s)$ est une matrice diagonale, le système consiste en m boucles SISO indépendantes, dont chacune peut

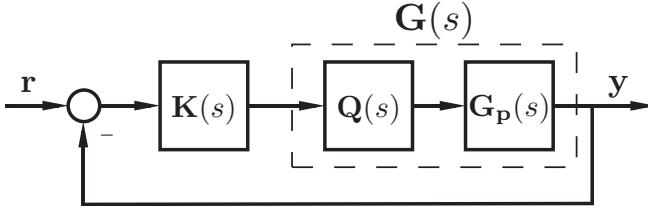


FIG. 5.15 – Configuration classique d'un système de commande MIMO décentralisé.

être dimensionnée de manière totalement indépendante par les techniques classiques. Cependant, en dehors des questions d'existence, de stabilité et de causalité, la matrice \mathbf{Q} assurant un découplage exact contient des fonctions de transfert du même ordre que celles du système à commander. De plus, même si le processus est modélisé parfaitement, les dynamiques compensées existeront toujours en présence de perturbations et peuvent être non commandables. En regard de ces considérations, le pré-compensateur est habituellement dimensionné seulement pour limiter les interactions et obtenir une dominance diagonale. Cette propriété sera étudiée par la suite. Différentes techniques de découplage existent. Nombreuses sont celles qui résultent en une matrices \mathbf{Q} statique [73].

5.4.2 Systèmes diagonalement dominants et analyse de stabilité

D'après le critère de Nyquist, l'analyse des matrices de transfert, connue en anglais sous le nom de *Nyquist array analysis* et traitée de manière approfondie en [65], fournit les bases théoriques nécessaires à l'étude de stabilité des systèmes diagonalement dominants. Ces considérations, qui sont brièvement répétées ci-après par souci de complétude, sont basées sur les théorèmes de stabilité des systèmes MIMO dans le domaine fréquentiel.

Considérons le système de la figure 5.15 et définissons les matrices de transfert suivantes :

$$\mathbf{L}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) \quad (5.42)$$

$$\mathbf{D}(s) = \mathbf{I} + \mathbf{G}(s)\mathbf{K}(s) \quad (5.43)$$

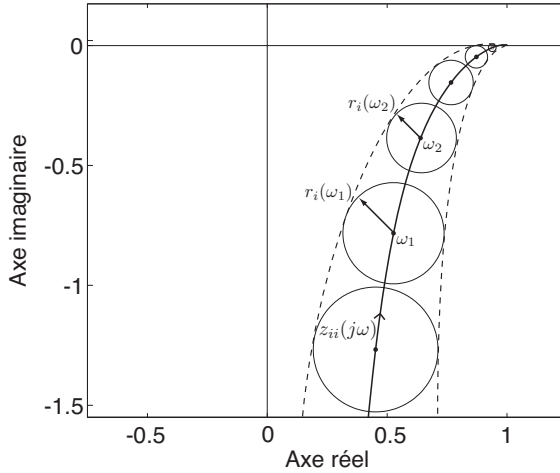


FIG. 5.16 – Interprétation graphique de la dominance diagonale.

De manière tout à fait analogue au cas SISO, le numérateur du déterminant de $\mathbf{D}(s)$ est le polynôme caractéristique de la boucle fermée, alors que son dénominateur constitue celui de la boucle ouverte. Ainsi, le critère de Nyquist, énoncé en section 2.3.1, peut être facilement transposé pour le cas MIMO. Il est cependant difficilement utilisable tel quel pour la synthèse de la commande, car il requiert le calcul du déterminant de $\mathbf{D}(s)$. Dans le cas de dominance diagonale, il peut cependant être exprimé de manière bien plus accessible.

La définition d'une matrice de transfert diagonalement dominante est donnée comme suit :

Une matrice \mathbf{Z} de dimension $m \times m$ est dite diagonalement dominante (par les colonnes) sur le contour de Nyquist C (cf. section 2.3.1), si, $\forall s \in C$ et $\forall i = 1, \dots, m$:

$$|z_{ii}(s)| > r_i(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^m |z_{ji}(s)| \quad (5.44)$$

Une interprétation graphique de cette condition est basée sur les bandes de Gershgorin. Si $\mathbf{Z}(s)$ est diagonalement dominant, alors la courbe de Nyquist de chaque fonction de transfert diagonale $z_{ii}(s)$, accompagnée de la

bande générée par les cercles de rayons $r_i(s)$, centrés en $z_{ii}(s)$ à la fréquence correspondante, exclut l'origine. Cette interprétation est illustrée en figure 5.16.

Pour les systèmes diagonalement dominants, un théorème de stabilité stipule que, lorsque s parcourt le contour de Nyquist C , le nombre d'encerclements de l'origine par $\det(\mathbf{Z}(s))$ est égal à la somme des encerclements des éléments diagonaux.

En faisant l'hypothèse de matrices de transfert $\mathbf{G}(s)$ et $\mathbf{K}(s)$ stables, le critère de stabilité peut alors s'énoncer de la manière suivante :

Si les bandes de Gershgorin centrées en $l_{ii}(s)$ excluent le point critique ($\mathbf{D}(s)$ est alors diagonalement dominant), le système est stable, si et seulement si le nombre d'encerclements des bandes autour du point -1 est nul. Le rayon des cercles générant les bandes sont alors :

$$r_i(s) = \sum_{j=1, j \neq i}^m |l_{ji}(s)|, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (5.45)$$

Remarque 5.4 : Ce critère de Nyquist représente seulement une condition de stabilité suffisante, mais non nécessaire. Si l'une des bandes recouvre le point critique, aucune conclusion ne peut être émise sur la stabilité du système en boucle fermée.

Remarque 5.5 : Il est intéressant de noter ici que les retards purs des fonctions de transfert $g_{ij}(s)$ ($i \neq j$) ne prennent pas part à l'analyse de stabilité. Si la condition précitée est satisfaite pour un système, la stabilité ne s'en trouvera aucunement modifiée en changeant leurs valeurs.

5.4.3 Procédure d'ajustement

Eu égard à l'analyse de stabilité faite précédemment, les bandes de Gershgorin ont, vis-à-vis de la stabilité, la même interprétation que les incertitudes traitées dans la section précédente. Pour garantir un système diagonalement dominant et stable, il est nécessaire de maintenir une certaine distance entre le point critique et la bande associée à chaque système diagonal. Ainsi, le paramètre de synthèse définissant cette distance minimale \tilde{M}_m est utilisé ici. Les performances en boucle fermée peuvent, quant à elles, être considérées

en utilisant la norme infinie de la fonction de sensibilité complémentaire ou encore la pulsation de croisement des systèmes diagonaux. Finalement, le critère fréquentiel de l'équation (4.44) est à nouveau exploité pour la synthèse à proprement parler.

5.4.4 Exemple de simulation

Un exemple de simulation est considéré ici pour illustrer la démarche proposée. Soit le processus MIMO décrit par la matrice de transfert suivante :

$$G_p(s) = \begin{pmatrix} \frac{8e^{-0.05s}}{4s^2+3s+2} & \frac{0.5e^{-s}}{(s+1)(2s+1)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{-0.2s+1}{(s+1)^2}e^{-0.2s} \end{pmatrix} \quad (5.46)$$

Comme le modèle possède la propriété de dominance diagonale, il ne nécessite pas de découplage supplémentaire. Notons ici que les fonctions de transfert de la diagonale représentent des systèmes oscillants ou à non-minimum de phase qui ne peuvent être modélisés de manière satisfaisante par des modèles simples tels qu'utilisés en [79], car ces derniers ne sont pas représentatifs du comportement dynamique.

Les régulateurs initiaux sont obtenus par la méthode de Kappa-Tau en ne considérant que les systèmes diagonaux. Des spécifications fréquentielles sont alors émises. Les mêmes spécifications sont considérées pour chaque boucle. Celles-ci consistent en une distance de 0.4 entre les bandes de Gershgorin et le point critique, ainsi qu'une valeur de $M_t^* = 1.05$ pour la norme infinie des fonctions de sensibilité complémentaire des systèmes diagonaux. La contrainte $T_i = 4T_d$ est encore choisie ici.

Les diagrammes de Nyquist représentant le résultat du dimensionnement des deux boucles ainsi que les bandes de Gershgorin et les cercles correspondant aux spécifications édictées sont dépeints en figures 5.17 et 5.18. Il peut être constaté que les exigences sont satisfaites.

Les réponses indicielles simulées du système en boucle fermée sont évoquées en figures 5.19 et 5.20 et comparées avec celles produites par les régulateurs résultant de la méthode citée en [16]. La simulation consiste en un échelon de la consigne relative à y_1 au temps $t = 0$ s et de celle correspondant à y_2 au temps $t = 15$ s. La figure 5.19 représente le tracé de la première sortie tandis que la figure 5.20 décrit celui de la deuxième. On peut remarquer

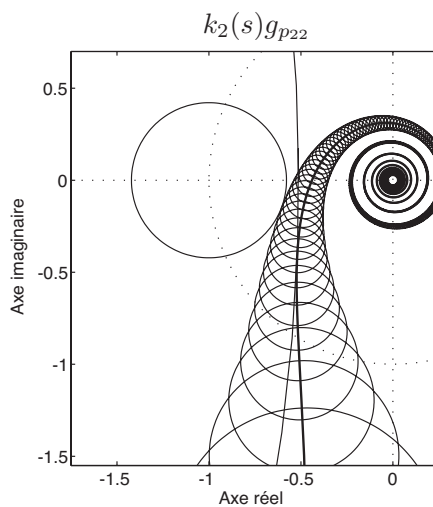


FIG. 5.17 – Diagramme de Nyquist de la première boucle avec la bande de Gershgorin associée.

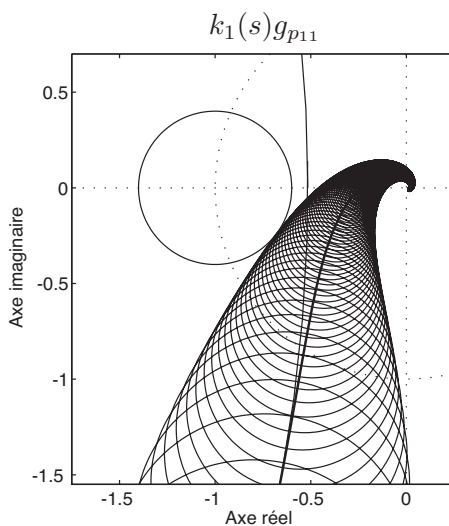


FIG. 5.18 – Diagramme de Nyquist de la deuxième boucle avec la bande de Gershgorin associée.

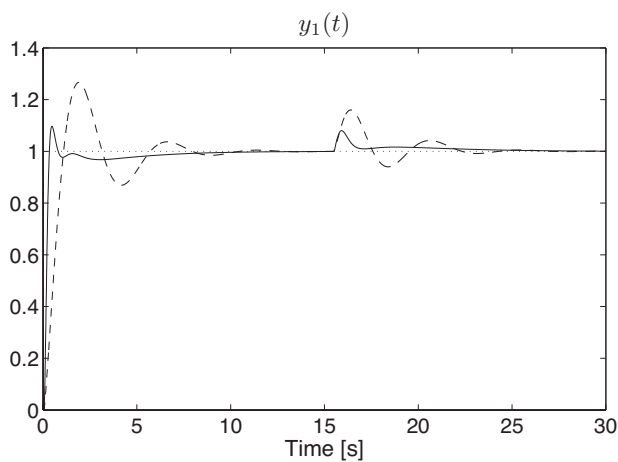


FIG. 5.19 – Réponses indicielles, tracé de la première sortie (— : régulateur proposé; --- : Méthode «Chen»).

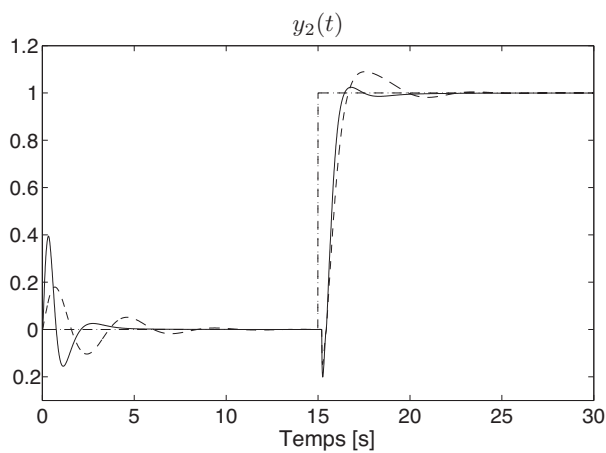


FIG. 5.20 – Réponses indicielles, tracé de la deuxième sortie (— : régulateur proposé; --- : Méthode «Chen»).

Régulateur	méthode	K_p	T_i	T_d
$k_1(s)$	«Chen» [16]	1.08	1.57	0.39
	proposé	2.92	3.55	0.89
$k_2(s)$	«Chen» [16]	2.24	1.65	0.41
	proposé	2.62	2.06	0.51

TAB. 5.2 – Paramètres des régulateurs PID

que les régulateurs proposés sont adéquats. En particulier, le dépassement et le temps d'établissement liés à un changement de consigne s'en trouvent considérablement réduits. Concernant les interactions entre les boucles, le nouveau régulateur diminue leurs temps de rejet ainsi que le dépassement obtenu pour la première sortie, mais amplifie celui de la deuxième. Les paramètres des régulateurs sont donnés en table 5.2. Notons finalement que, bien que la méthode utilisée à titre comparatif soit plus simple dans sa mise en œuvre, elle requiert cependant les mêmes connaissances du processus que celle proposée ici, mais ne peut garantir la stabilité du système MIMO en boucle fermée.

5.5 Conclusions

Ce chapitre, où un modèle paramétrique du système à commander a été considéré pour l'ajustement, s'inscrit dans la suite logique du chapitre précédent. Dans un premier temps, l'emploi de modèles a servi à l'étude des résultats amenés par la minimisation du critère fréquentiel considéré. Un examen plus détaillé porte sur la considération d'un régulateur PI lorsque deux paramètres de synthèse sont envisagés, représentant les normes infinies des fonctions de sensibilité. Dans ce cas, il a été clairement établi, à l'aide d'un exemple simple, que le critère peut posséder aucun, un ou plusieurs minima. Le rôle prépondérant du régulateur initial a en outre été souligné, vu le caractère non convexe du critère. Celui-ci doit se trouver initialement proche d'un minimum de sorte à favoriser la convergence et à obtenir un régulateur dont les caractéristiques lui sont proches.

Le dimensionnement de PID par la méthode itérative introduite dans le chapitre 4, a ensuite été considéré dans le cas où le système est décrit par un modèle. Les incertitudes sous-jacentes à toute modélisation ont tout particulièrement été prises en compte pour une synthèse robuste en stabilité

et en performance. Les incertitudes fréquentielles non-structurées en forme de disque, appréciées pour leur simplicité ont été choisies pour une étude détaillée. Sans nécessiter aucune dérivée du profil d'incertitudes, le gradient et le Hessien exacts ont pu être calculés. L'analyse faite, l'exemple de simulation choisi ainsi que l'application présentée ont montré la simplicité de la démarche ainsi que les résultats qu'elle peut offrir.

Enfin, la procédure a pu être utilisée pour synthétiser une commande décentralisée qui garantit la stabilité en boucle fermée du système, dans le cadre des processus MIMO diagonalement dominants. Les bandes de Gershgorin utilisées pour démontrer la stabilité possèdent une similitude avec les incertitudes discales du cas SISO, qui permet de résoudre le problème d'automatique de manière semblable. L'exemple proposé montre que les paramètres de synthèse utilisés sont judicieux et permettent, en plus d'assurer la stabilité, d'obtenir des résultats améliorant les performances par rapport à une méthode récente [16].

Chapitre 6

Conclusions

Le travail présenté dans cet ouvrage concerne l’ajustement de régulateurs PID offrant la possibilité d’utiliser divers paramètres de synthèse issus du domaine fréquentiel. Le problème a été considéré aussi bien dans le cadre d’une synthèse directe, où deux procédures de complexité différentes ont été présentées, qu’en se fondant sur un modèle du système à commander. Lors d’une telle approche, les incertitudes associées à la modélisation ont en particulier été considérées. Dans ce chapitre, les contributions de la thèse sont passées en revue, leurs points forts ainsi que leurs faiblesses sont notamment récapitulés.

6.1 Contributions

L’exploitation des deux intégrales de Bode pour la synthèse de régulateurs PID est l’une des contributions majeures de la thèse. Ces intégrales fournissent une estimation de la pente de la phase et de l’amplitude dans le diagramme de Bode en une pulsation, à partir de la seule connaissance de la réponse harmonique du système en ce point. Pour les systèmes stables à minimum de phase, la précision des approximations, qui dépend passablement de la dynamique du système, se révèle très souvent appropriée pour fournir des résultats de valeur au problème considéré. Il a en outre été démontré que la présence d’un retard pur n’affecte que de manière partielle la

précision.

Ces intégrales ont été utilisées à plusieurs fins. Dans une première approche, la méthode s'appuie sur elles afin de calibrer sans modèle la réponse harmonique de la boucle, en imposant sa pente à la pulsation de croisement. D'autre part, elles ont été utilisées, dans le chapitre qui a suivi, pour le calcul des dérivées du critère fréquentiel, et permettent sa minimisation en quelques itérations seulement.

La démarche dérivée de la méthode de Ziegler-Nichols modifiée constitue bien entendu aussi une contribution de la thèse. On a montré comment il est possible, en requérant une connaissance minimale du système, de fixer des contraintes sur les normes infinies des fonctions de sensibilité et ainsi d'améliorer le calibrage de la boucle par une imposition de pente. Bien entendu, cette procédure ne garantit pas stricto sensu la satisfaction des contraintes imposées, mais elle permet de proposer une alternative à la méthode traditionnelle lorsque celle-ci livre des solutions insatisfaisantes. Les résultats découlant de simulations et d'expériences temps réel ont démontré ce potentiel. La démarche proposée permet aussi de fournir une solution rationnelle, fondée sur des paramètres modernes de synthèse, pour le choix du rapport entre la constante d'intégration et de dérivation. Aucune étude approfondie n'a cependant été menée dans ce travail pour confirmer ou invalider le nombre magique de quatre, préconisé pour la majorité des systèmes industriels traditionnels, mais également parfois contesté dans la littérature.

La méthode itérative, sans modèle du système, recèle plusieurs contributions importantes. La mesure des normes infinies des fonctions de sensibilité à l'aide de cycles limites, générés par des expériences non linéaires est l'une d'elles. Deux schémas, dont les propriétés ont été établies durant ce travail, permettent ces estimations à l'aide d'une procédure ad hoc. Il a notamment été démontré que chacun de ces schémas peut générer un régime oscillatoire permanent correspondant à la fréquence où le module de la fonction de sensibilité (ou respectivement de la sensibilité complémentaire) vaut une valeur choisie. Lorsque cette dernière est supérieure à la norme infinie de la fonction, la passivité stricte a alors été formellement démontrée. D'autres méthodes du relais existantes ont notamment été mises à profit pour extraire les informations nécessaires aux méthodes élaborées dans ce travail dans le but d'effectuer l'ajustement sans le recours à un modèle du système

à commander.

L'idée d'utiliser un critère fréquentiel général, permettant d'inclure aussi bien les marges classiques de robustesse que des indicateurs plus modernes, contribue largement à la flexibilité appréciée de la méthode. Ainsi, différents paramètres, pouvant symboliser aussi bien la stabilité, la robustesse que les performances en boucle fermée, et représentant in fine l'essence du problème sous-jacent, peuvent être considérés facilement. Du point de vue théorique, la non-convexité du critère n'impliquant pas une convergence garantie et qui sous-entend aussi un nombre souvent indéfini de solutions, constitue inévitablement le point faible majeur de la méthode. D'un point de vue pratique, le choix d'un régulateur initial proche de celui désiré permet très souvent de remédier à cette faiblesse. Le calcul qui a montré que les dérivées du critère peuvent, par des artifices de calcul, être représentées à l'aide de dérivées partielles du régulateur et du système, constitue également un point d'intérêt de ce chapitre.

La considération d'incertitudes constitue la contribution principale de l'ajustement fondé sur un modèle. Il a notamment été montré comment des marges de robustesse peuvent être calculées en présence d'incertitudes discales. Celles-ci peuvent alors être incorporées au critère à des fins d'ajustement. Comme la minimisation de ce dernier ne requiert aucune dérivée du profil d'incertitudes, l'optimisation peut être faite facilement, même si, comme dans l'application donnée, aucun modèle paramétrique n'est fourni. Finalement, l'utilisation de la méthode pour la commande décentralisée de systèmes multivariables à l'aide de PID, a montré une application judicieuse de la philosophie présentée et permet, contrairement aux différentes procédures existantes, de garantir la stabilité du système MIMO en boucle fermée.

Bibliographie

- [1] B. D. O. Anderson. The small-gain theorem, the passivity theorem and their equivalence. *Journal of the Franklin Institute*, 293(2):105–115, 1972.
- [2] B. D. O. Anderson and J. B. Moore. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1990.
- [3] K. J. Aström and B. Wittenmark. *Adaptive control*. Addison-Wesley Publishing Compagny, 1989.
- [4] K. J. Aström, H. Panagopoulos, and T. Häggglund. Design of PI controllers based on non-convex optimisation. *Automatica*, 34(5):585–601, 1998.
- [5] K. J. Aström and T. Häggglund. Automatic tuning of simple regulators with specifications on phase and amplitude margins. *Automatica*, 20(5):645–651, 1984.
- [6] K. J. Aström and T. Häggglund. *Automatic Tuning of PID Controllers*. Instrument Society of America, 1st edition, 1988.
- [7] K. J. Aström and T. Häggglund. *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*. Instrument Society of America, 2nd edition, 1995.
- [8] K. J. Aström and T. Häggglund. The future of PID control. *Control Engineering Practice*, 9(11):1163–1175, November 2001.
- [9] K. J. Aström and T. Häggglund. *Advanced PID Control*. Instrument Society of America, 2006.
- [10] H. W. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design*. New York, Van Nostrand, 1945.
- [11] Y. Q. Chen, C. H. Hu, and K. L. Moore. Relay feedback tuning of robust PID controllers with iso-damping property. In *42th IEEE CDC*, Hawaii, 2003.

- [12] A. Besançon Voda and H. Roux-Buisson. Another version of the relay feedback experiment. *J. Proc. Cont.*, 7(4):303–308, 1997.
- [13] J. Crowe and M. A. Johnson. Automated PI controller tuning using a phase locked loop identifier module. In *26th Annual Conference of the Industrial Electronics Society*, volume 2, pages 1463–1468, 2000.
- [14] J. Crowe and M. A. Johnson. Automated PI control tuning to meet classical performance specifications using a phase locked loop identifier. In *American Control Conference*, pages 2186–2191, 2001.
- [15] J. Crowe and M. A. Johnson. PID tuning for classical robustness specifications by enumeration methods. In *IECON'01: The 27th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pages 752 – 757, 2001.
- [16] D. Chen and D. E. Seborg. Multiloop PI/PID controller design based on Gershgorin bands. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, 149(1):68–73, 2002.
- [17] G. H. M. de Arruda and P. R. Barros. Relay based gain and phase margins PI controller design. In *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, Budapest, May 21–23*, pages 1189–1194, 2001.
- [18] G. H. M. de Arruda and P. R. Barros. Relay-based closed loop transfer function frequency points estimation. *Automatica*, 39:309 – 315, 2003.
- [19] G. H. M. de Arruda and P. R. Barros. Relay based closed loop transfer function estimation. In *ACC*, pages 1812–1816, June 2000.
- [20] J. E. Dennis and R. B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, 1996.
- [21] J. Doyle, B. Francis, and A. Tannenbaum. *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Company, New York, 1992.
- [22] N.R. Draper and H. Smith. *Applied Regression Analysis*. Wiley and Sons, New-York, 2nd edition, 1981.
- [23] R. Fletcher. *Practical methods of optimization*. A Wiley-Interscience Publication, second edition, 1997.
- [24] A. Fossard. *Méthode du premier harmonique*. ENSAE, Toulouse, 1995.

- [25] C. Gang, Y. Haibin, X. Weihua, and C. Jian. PID control of unstable process with large dead time. *Chinese Journal of scientific instrument*, 26(3):301–303, 2005.
- [26] D. Garcia, A. Karimi, and R. Longchamp. Data-driven controller tuning based on a frequency criterion. In *CDC03*, pages 127–132, December 2003.
- [27] D. Garcia, A. Karimi, and R. Longchamp. Data-driven controller tuning using frequency domain specifications. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 2006.
- [28] D. Garcia, A. Karimi, and R. Longchamp. Robust PID controller tuning with specifications on the infinity-norm of sensitivity functions. *Accepté pour publication. IEE Proceedings Control Theory and Applications*, 2006.
- [29] D. Garcia, A. Karimi, and R. Longchamp. PID controller design for multivariable systems using gershgorin bands. In *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July, 2005.
- [30] D. Garcia, A. Karimi, and R. Longchamp. PID controller design with specifications on the infinity-norm of sensitivity functions. In *16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July, 2005.
- [31] D. Garcia, A. Karimi, and R. Longchamp. Robust PID controller tuning with specification on modulus margin. In *IEEE ACC04*, Boston, MA, USA, June-July 2004.
- [32] D. Garcia, A. Karimi, and R. Longchamp. Infinity norm measurement of sensitivity function based on limit cycles in a closed-loop experiment. In *ECC03*, September 2003.
- [33] D. Garcia, A. Karimi, R. Longchamp, and S. Dormido. PID controller design with constraints on sensitivity functions using loop slope adjustment. In *IEEE ACC*, Minneapolis, Minnesota USA, June 14-16, 2006.
- [34] L. Guzzella, O. D. Crisalle, F. J. Kraus, and D. Bonvin. Necessary and sufficient conditions for the robust stabilizing control of linear plants with ellipsoidal parametric uncertainties. In *30th Conference on Decision and Control*, pages 2948–2953, 1991.

- [35] C. C. Hang, K. J. Astrom, and W. K. Ho. Refinements of the ziegler-nichols tuning formula. *IEE Proceedings-D*, 138(2):111–118, March 1991.
- [36] C. C. Hang, K. J. Astrom, and Q. G. Wang. Relay feedback auto-tuning of process controllers - a tutorial review. *Journal of Process Control*, (12):143–162, 2002.
- [37] S. L. Harris and D. A. Mellichamp. Controller tuning using optimization to meet multiple closed-loop criteria. *AIChE Journal*, 31(3):484–487, 1995.
- [38] W. K. Ho, C. C. Hang, and L. S. Cao. Tuning of PID controllers based on gain and phase margin specifications. *Automatica*, 31(3):497–502, 1995.
- [39] W. K. Ho, C. C. Hang, and J. H. Zhou. Performance and gain and phase margins of well-known PI tuning formulas. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(2):245–248, 1995.
- [40] W.K. Ho, Y. Hong, A. Hansson, H. Hjalmarsson, and J.W. Deng. Relay auto-tuning of PID controllers using iterative feedback tuning. *Automatica*, 39(1):149–157, 2003.
- [41] I. M. Horowitz and M. Sidi. Synthesis of feedback systems with large plant ignorance for prescribed time-domain tolerances. *International Journal of Control*, 16:287 – 309, 1972.
- [42] C. Hwang and J. H. Hwang. On stabilization of first-order plus dead-time unstable processes using PID controllers. In *ECC*, pages 614–623, September 2003.
- [43] A. Karimi, D. Garcia, and R. Longchamp. PID controller tuning using Bode’s integrals. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 11(6):812–821, 2003.
- [44] A. Karimi, D. Garcia, and R. Longchamp. PID controller design using Bode’s integrals. In *IEEE ACC, FP13-6*, pages 5007–5012, Anchorage, Alaska, USA, May 2002.
- [45] A. Karimi, M. Kunze, and R. Longchamp. Robust controller design by linear programming with application to a double-axis positioning system. *soumis à Control Engineering Practice*, 2006.

- [46] A. Karimi, M. Kunze, and R. Longchamp. Robust PID controller design by linear programming. In *IEEE ACC*, Minneapolis, Minnesota USA, June 14-16, 2006.
- [47] C. T. Kelley. *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*. Society for industrial and applied mathematics, Philadelphia, 1995.
- [48] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. MacMillan, New York, 1992.
- [49] B. Kristiansson, B. Lennartson, and C. M. Fransson. From PI to h_∞ control in a unified framework. In *39th IEEE-CDC, Sydney, Australia*, pages 2740–2745, 2000.
- [50] A. Leva and A. M. Colombo. On the IMC-based synthesis of the feedback block of the ISA PID regulators. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 26(5):417–440, 2004.
- [51] L. Ljung. *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2nd edition edition, 1999.
- [52] R. Longchamp. *Commande numérique de systèmes dynamiques*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.
- [53] R. Longchamp and Y. Piguet. Closed-loop estimation of robustness margins by the relay method. *IEEE ACC*, pages 2687–2691, 1995.
- [54] S. Majhi and D. P. Atherton. Autotuning and controller design for unstable time delay processes. In *UKACC International conference on Control*, pages 769–774, September 1998.
- [55] S. Majhi and D. P. Atherton. Online tuning of controllers for an unstable FOPDT process. *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, 147(4):421–427, July 2000.
- [56] R. E. Miller. *Optimization: Foundations and applications*. John Wiley & Sons, Inc, New York, 2000.
- [57] M. Morari and E. Zafrou. *Robust Process Control*. Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J., 1989.
- [58] H. E. Musch and M. Steiner. Robust PID control for an industrial distillation column. *IEEE Control Systems Magazine*, 14(4):46–55, 1995.
- [59] S. Ogawa. PI controller tuning for robust performance. In *IEEE Conference on control applications, Albany NY*, pages 101–106, September 1995.

- [60] H. Panagopoulos, K. J. Aström, and T. Häggglund. Design of PID controllers based on constraints optimization. In *IEEE ACC, San Diego, California*, pages 3858–3862, June 1999.
- [61] E. Poulin and A. Pomerleau. Unified PID design method based on a maximum peak resonance specification. In *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, volume 144 (6), pages 566–574, 1997.
- [62] Q. Bi, Q. G. Wang, and C. C. Hang. Relay-based estimation of multiple points on process frequency response. *Automatica*, 33(9):1753–1757, September 1997.
- [63] Q. G. Wang, T. H. Lee, H. W. Fung, Q. Bi, and Y. Zhang. PID tuning for improved performance. *IEEE Transactions on Control systems Technology*, 7(4):3984–3989, 1999.
- [64] C. A. Roduner. *H_∞ -Regelung linearer Systeme mit Totzeit*. Diss. ETH Nr. 12337, Zürich, 1997.
- [65] H. H. Rosenbrock. *State-space and multivariable theory*. London Nelson, 1970.
- [66] M. Saeki. A new adaptive identification method of critical loop gain for multi-input multi-output plants. *37th IEEE CDC*, 4:3984–3989, 1998.
- [67] M. Saeki. A new adaptive method for identification of critical gain using saturation function. *Asian Journal of Control*, 4(4):464–471, 2002.
- [68] T. S. Schei. Automatic tuning of PID controllers based on transfer function estimation. *Automatica*, 30(12):1983–1989, 1994.
- [69] J.-J. E. Slotine and W. Li. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall International, 1991.
- [70] A. Stoorvogel. *The H_∞ Control Problem: A State Space Approach*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1992.
- [71] K. K. Tan, T. H. Lee, and Q. G. Wang. Enhanced automatic tuning procedure for process control of PI/PID controllers. *AIChE journal*, 9(42):2555–2562, September 1996.
- [72] J. Van de Vegte. *Feedback Control Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1st edition, 1986.
- [73] J. Van de Vegte. *Feedback Control Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 3rd edition, 1994.

-
- [74] S. Veres and H. Hjalmarsson. Tuning for robustness and performance using iterative feedback tuning. In *IEEE 41th Conference on Decision and Control*, pages 4682–4687, December 2002.
 - [75] A. Voda and I. D. Landau. The auto-calibration of PI controllers based on two frequency measurements. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 9:395 – 421, 1995.
 - [76] A. Voda and I. D. Landau. A method for the auto-calibration of PID controllers. *Automatica*, 31(1):41 – 53, 1995.
 - [77] Q. G. Wang, H. W. Fung, and Y. Zhang. PID tuning with exact gain and phase margins. *ISA Transactions*, 38:243–249, 1999.
 - [78] Q. G. Wang, T. H. Lee, and C. Lin. *Relay feedback, Analysis identification and control*. Springer-Verlag, London, 1995.
 - [79] W.K. Ho, T. H. Lee, and O. P. Gan. Tuning of multiloop proportional-integral-derivative controllers based on gain and phase margin specifications. *Ind. Eng. Chem. Res.*, 36:2231–2238, 1997.
 - [80] O. Yaniv and M. Nagurka. Design of PID controllers satisfying gain margin and sensitivity constraints on a set of plants. *Automatica*, 40:111–116, 2004.
 - [81] J. G. Ziegler and N. B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *Transactions ASME*, (64):759–768, 1942.

Curriculum vitæ

Daniel Garcia

de nationalité suisse et espagnole

originaire de Savièse (VS)

né le 20 janvier 1976

marié, 1 enfant

Expérience professionnelle

- 2000 – 2006 **Assistant-doctorant à l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) :**
Travail de recherche relatif à la commande robuste de PID
Supervision de projets parfois en collaboration industrielle
Encadrement des exercices et laboratoires en automatique
- 1999 **Stage chez ABB Kraftwerke AG, Baden**
- 1998 **Stage chez Wärtsilä NSD Switzerland, Winterthur**
- 1996 **Stage pratique chez Lonza AG, Viège**

Formation

- 2000 – 2006 **Thèse de doctorat** au Laboratoire d'Automatique de l'EPFL
- 1995 – 2000 **Diplôme d'ingénieur en mécanique** de l'École Polytechnique Fédérale de Zurich
- 1990 – 1995 **Maturité scientifique** du Lycée-Collège des Creusets, Sion

Publications scientifiques

Auteur principal :

- **D. Garcia**, A. Karimi, R. Longchamp, *Data-Driven Controller Tuning Using Frequency Domain Specifications*, Industrial & Engineering Chemistry Research, 2006.
- **D. Garcia**, A. Karimi, R. Longchamp, *Robust PID controller tuning with specifications on the infinity-norm of sensitivity functions*, Accepté pour publication. IEE Proceedings Control Theory and Applications, 2006.
- **D. Garcia**, A. Karimi, R. Longchamp, S. Dormido, *PID controller design with constraints on sensitivity functions using loop slope adjustment*, American Control Conference, Minneapolis, Minnesota, USA, 2006.
- **D. Garcia**, A. Karimi, R. Longchamp, *PID controller for multivariable systems using Gershgorin bands*, 16th World Congress of IFAC, Prague, Czech Republic, 2005.
- **D. Garcia**, A. Karimi, R. Longchamp, *PID controller design with specifications on the infinity-Norm of sensitivity functions*, 16th World Congress of IFAC, Prague, Czech Republic, 2005.
- **D. Garcia**, A. Karimi, R. Longchamp, *Robust controller tuning with specification on modulus margin*, American Control Conference, Boston, USA, 2004.
- **D. Garcia**, A. Karimi, R. Longchamp, *Data-driven controller tuning based on a frequency criterion*, Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, 2003.
- **D. Garcia**, A. Karimi, R. Longchamp, *Infinity-norm Measurement of sensitivity function based on limit cycles in a closed-loop experiment*, European Control Conference, Cambridge, UK, 2003.

Co-Auteur :

- A. Karimi, **D. Garcia**, R. Longchamp, *PID controller tuning using Bode's integrals*, IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 11, No. 6, 812-821, 2003.
- A. Karimi, **D. Garcia**, R. Longchamp, *Iterative controller tuning using Bode's integrals*, Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, USA, 2002.
- A. Karimi, **D. Garcia**, R. Longchamp, *PID controller design using Bode's integrals*, American Control Conference, Anchorage, Alaska, USA, 2002.